

ირმა დავითაშვილი

თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ოპტიმიზაცია

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
აპრილი, 2008

საავტორო უფლება © 2008 დავითაშვილი ირმა

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემოთ ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით დავითაშვილი ირმას მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: "თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ოპტიმიზაცია" და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელი: სრ.პროფ.თამაზ ოზგაძე

რეცენზენტი:

რეცენზენტი:

რეცენზენტი:

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
წელი

ავტორი: დავითაშვილი ირმა

დასახელება: თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ოპტიმიზაცია

ფაკულტეტი : ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა:

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ შემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

ავტორი ინარჩუნებს დანარჩენ საგამომცემლო უფლებებს და არც მთლიანი ნაშრომის და არც მისი ცალკეული კომპონენტების გადაბეჭდვა ან სხვა რაიმე მეთოდით რეპროდუქცია დაუშვებელია ავტორის წერილობითი ნებართვის გარეშე.

ავტორი ირწმუნება, რომ ნაშრომში გამოყენებული საავტორო უფლებებით დაცული მასალებზე მიღებულია შესაბამისი ნებართვა (გარდა ის მცირე ზომის ციტატებისა, რომლებიც მოითხოვენ მხოლოდ სპეციფიურ მიმართებას ლიტერატურის ციტირებაში, როგორც ეს მიღებულია სამეცნიერო ნაშრომების შესრულებისას) და ყველა მათგანზე იღებს პასუხისმგებლობას.

სადისერტაციო ნაშრომს ვუძღვნი
ჩემს ძვირფას მეუღლეს,
ზურაბ ქორჭაშვილს

რეზიუმე

ნაშრომში "თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ოპტიმიზაცია" დასმულია და გადაწყვეტილია ერთ-ერთი საკმაოდ აქტუალური თემის ბგერამდელი თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ქვედა საზღვრის ოპტიმიზაციისა და ბლანტი სითხით გარსდენის ამოცანები. პროფილის ბლანტი სითხით გარსდენის შესასწავლად გამოიყენება სხვადასხვა მეთოდები: სასრულ-სხვაობათა მეთოდი, ვარიაციული მეთოდები, კომბინირებული მეთოდები და სხვა, რომლებიც საკმაოდ რთულია. ამიტომ სათანადო გათვლები, უმეტესწილად, სრულდება ნახევრადემპირიული ფორმულების საშუალებით. მიღებული შედეგები აეროდინამიკისათვის საკმაოდ უხეშია და საჭიროებს დაზუსტებას. რაც შეეხება პრაქტიკული თვალსაზრისით დღესდღეობით არსებობს მრავალი ცნობილი კომპანიის მიერ შექმნილი ოპტიმიზირებული პროფილები ЦАГИ, NACA და ა.შ. მათ მიერ დამზადებულ პროფილებს ექსპერიმენტულს უწოდებენ, რადგან მათი დაპროექტება და შესწავლა წმინდა ექსპერიმენტზეა დაყრდნობილი, ყველაფერი ეს საჭიროებს, როგორც დიდ მატერიალურ ხარჯებს, ასევე დიდ დროსაც. ჩვენს მიერ შემუშავებული მეთოდი კი დამყარებულია მხოლოდ კომპიუტერულ გათვლებზე, რაც დროისა და მატერიალური ხარჯების დაზოგვის საშუალებას იძლევა.

ნაშრომში წარმოდგენილია ლიტერატურა, რომელშიც მოკლედ არის მიმოხილული ამ სფეროში ჩატარებული კვლევები, მათი დადებითი და უარყოფითი მხარეები, ნაჩვენებია რომ თეორიული კვლევების უმეტესობა ჩატარებულია პროფილის იდეალური უკუმში სითხით გარსდენისას, ხოლო რაც შეეხება ბლანტი სითხით გარსდენას, კვლავ რჩევა მთელი რიგი გადაუჭრელი პრობლემებისა. ასევე, მოცემულია თვითმფრინავის ფრთისა და მისი პროფილების აეროდინამიკური მახასიათებლების, როგორც კვლევის ობიექტის, მოკლე აღწერა.

წარმოდგენილია აგრეთვე სითხეთა დინამიკის კლასიკური მათემატიკური მოდელები და იდეალური სითხის სტაციონარული ნაკადით პროფილების გარსდენის ამოცანები.

დისერტაციაში ჩამოყალიბებულია პროფილის ბლანტი სითხით გარსდენის ამოცანის ამოხსნის ახალი მიდგომა. წარმოდგენილია ვარიაციული აღრიცხვის ამოცანის დაყვანა არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანაზე, განმსაზღვრელი პარამეტრების ხარისხოვანი ფუნქციების მწკრივებად გაშლის საშუალებით. გვაქვს ერთდროულად რამდენიმე მიზნის ფუნქცია: ინტეგრალური ცდომილების ფუნქცია, რომლის მინიმიზაციასაც ვახდენთ, და ამწევი ძალის კოეფიციენტის საძებნი ფუნქცია, რომლის მაქსიმიზაციაც გვსაჭიროება. ამრიგად, გვაქვს ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანა. ეს ამოცანა ერთი მრავალი ცვლადის ფუნქციის მინიმუმის პოვნის ამოცანაზე შესაბამისი შეზღუდვებით. შეზღუდვების პირობებად აღებულია ბერნულის განტოლება უგანზომილებო სახით, მასის შენახვის კანონი და დამატებითი კინემატიკური პირობები. მიღებულ არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანას

ვხსნით ფლექტჩერის მეთოდით, ხოლო მის რეალიზებას ვახდენთ პროგრამა MathCad -ის საშუალებით.

ნაშრომში განხილულია მოცემული ზედა საზღვრის პირობებში ოპტიმალური ქვედა საზღვრის პოვნის ამოცანა (ამწევი ძალის C_y , კოეფიციენტის მაქსიმიზაციისა და ინტეგრალური ცდომილების ფუნქციის მინიმიზაციისა). შესწავლილია მიღებული ოპტიმალური პროფილის გარსდენის ამოცანა. შედარებულია ექსპერიმენტული და მიღებული პროფილების გათვლების შედეგები, რის შედეგადაც შეგვიძლია ვთქვათ, რომ ცდომილება არ აღემატება 5%-ს, ამიტომ ჩვენს მიერ მიღებული პროფილი შეიძლება ოპტიმალურად ჩაითვალოს.

გარდა ამისა, შესწავლილია შემხვედრი სითხის სიჩქარის ეპიურის ფორმის გავლენა გარსდენის რეჟიმზე. გარსდენას ვახდენთ როგორც პარაბოლური, ისე სწორზახოვანი სიჩქარეთა ეპიურის მქონე სითხით. როგორც გათვლებმა გვიჩვენა, შედეგები, კერძოდ, კი ამწევი ძალის კოეფიციენტი და ინტეგრალური ცდომილების ფუნქცია ყველა შემთხვევაში თითქმის ტოლ მნიშვნელობებს ღებულობს, ცდომილება 0,5%-1%-ია, ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ შემხვედრი ნაკადის სიჩქარის ეპიურის ფორმა მცირე გავლენას ახდენს გარსდენის რეჟიმზე.

ნაშრომში ჩვენი მეთოდის აპრობაციის მიზნით ვახდენთ ექსპერიმენტული ოპტიმალური პროფილების თეორიულ მოდელირებას. თითოეული მათგანისთვის მოცემული ზედა საზღვრის პირობებში ნაპოვნია უცნობი ქვედა საზღვარი. როგორც ექსპერიმენტული, ასევე ჩვენს მიერ მიღებული პროფილებისთვის ამოხსნილია პროფილის ბლანტი სითხით გარსდენის ამოცანა და შედარებულია შედეგები. მიღებული შედეგებით შეგვიძლია ვიმსჯელოთ, რომ ვინაიდან ამწევი ძალის კოეფიციენტებს შორის ცდომილება დასაშვებ ზღვარს არ აღემატება და საშუალოდ შეადგენს 2-6%-ს,

ჩატარებულია გამოკვლევა ამოცანის ამონახსნის მდგრადობაზე, როგორც ექსპერიმენტული, ისე ჩვენს მიერ მიღებული პროფილების შემთხვევაში. ამისათვის პროფილის ქვედა კონტურზე მინიჭებულია მცირე (დასაშვები) შეშფოთება $\Delta = 5\%$ -იანი ნაზრდის სახით და შესწავლილია გარსდენის სურათი. ამწევი ძალის კოეფიციენტების შედარებამ გვიჩვენა, რომ ცდომილება ძალიან მცირეა, რის შედეგადაც შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ამონახსნი მდგრადია, რაც იმას ნიშნავს, რომ ფრთის დამზადება ტექნოლოგიურად შესაძლებელია.

ჩვენს მიერ გადაწყვეტილი ამოცანა მეტად აქტუალურია. არსებობს ფრთის გარსდენის ამოცანების შესწავლის პროგრამული პაკეტები COSMOS და ANSYS, მაგრამ ისინი არ იძლევიან ოპტიმალური პროფილის პოვნის საშუალებას, არამედ ახდენენ არსებული პროფილების აეროდინამიკური მახასიათებლების გამოთვლას. ჩვენს მიერ აგებული ალგორითმი კი საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ პროფილის როგორც აეროდინამიკური მახასიათებლები, ასევე ოპტიმალური ქვედა საზღვარი.

Abstract

The work “Aircraft wing section optimization” states and solves the problems of one of the considerably urgent themes of optimization of lower limit of subsonic aircraft wing section and viscous fluid flow around. In order to study viscous fluid flow around of the section different methods are used: finite difference method, variational methods, combined methods, etc. which are complicated enough. Therefore, the respective calculations are mostly done with the help of semi-empirical formulas. The received results are quite rough for aerodynamics and need precision. As to practical viewpoint at present there exist optimized sections ЦАГИ, NACA, etc. created by many known companies. The sections made by them are called experimental as their design and research are purely experimental. All this needs both, great material expenses and time. While the method developed by us is founded only on computer calculations that gives the possibility of economy of time and material expenses.

The work presents literature offering brief review of the researches carried out in this sphere, there positive and negative sides, showing that most of theoretical researches are done at section flow around with ideally incompressible fluid, while as to the flow around with viscous fluid, there still are some unsolved problems. Besides, a brief description of aerodynamic characteristics of aircraft wing and its sections are given as research object.

Also classical mathematical models of fluid dynamics and the problems of sections flow around with ideal fluid stationary flow are presented.

The dissertation presents a new approach to the solution of the problem of viscous fluid flow around the section. The reduction of the problem of calculus of variations to nonlinear programming problem by means of series expansion of qualitative functions of determining parameters is presented. We simultaneously have the function of several objectives: function of integral error, which is minimized and function for searching lifting force coefficient which is to be maximized. Thus, we have the problem of vector optimization. This problem is reduced to the problem of finding of one multi variable function minimum with respective limitations. Bernoulli equation in dimensionless form, mass conservation law and additional kinematical conditions are accepted as limitation conditions. The received nonlinear programming problem is solved with Fletcher method while its realization is done with program MathCad.

In conditions of the given upper limit the problem of finding of optimum lower limit with the purpose of lifting force C_y coefficient maximization at minimization of integral error function is discussed in the work. The problem of flow around of the received optimum section is studied. The results of calculations of experimental and received sections are compared which allows to conclude that the error does not exceed 10%. Therefore, the section obtained by us can be considered as optimum.

Furthermore, the effect of diagram shape of the head flow velocity profile on flow around condition is studied. Flow around is done with the fluid having parallel, as well as, linear velocity profile. As the calculations have shown, the

results, particularly the coefficient of lifting force and integral error function in all cases get almost equal values, error being 0.5%-1%. Therefore, we can conclude that head flow velocity diagram shape effects insignificantly on flow around conditions.

In the work with the object of approbation of our method we make theoretical modeling of four experimental optimum sections. For each of them within the given upper limit conditions the unknown lower limit is found. For experimental, as well as, for the sections received by us the problem of section flow around with viscous fluid is solved and the results are compared. According to the received results we can presume that as the error between lifting force coefficients does not exceed the allowed limit making 2-6% in average, while the obtained lower limit coefficients differ from the coordinates of experimental sections lower limits, we have two optimum values of the lower limit.

The research is made on the sustainability of problem solution, in experimental, as well as, in the case of sections received by us. For this on the lower contour of the section a small (allowable) disturbance is applied in the form of $\Delta = 5\%$ growth and the picture of flow around is studied. The comparison of lifting force coefficients showed that the error is very small and, as a result we can deduce that the solution is sustainable. That means it is possible to make a wing technologically.

The problem solved by us is very urgent. There exist program packages COSMOS and ANSYS of wing flow around problem study but they do not give the possibility of optimum section determination but make the calculation of aerodynamic characteristics of the existing sections. While the algorithm constructed by us gives the possibility to find aerodynamic characteristics, as well as, optimum lower limit of the section.

შინაარსი

შესავალი	18
1. არსებული ლიტერატურის მიმოხილვა	24
1.1 ფრთა და ფრთის პროფილები	24
1.2 პროფილების გათვლისა და ოპტიმიზაციის არსებული მეთოდების მიმოხილვა	32
2. ამოცანის დასმა	51
2.1 სითხეთა დინამიკის მათემატიკური მოდელები	51
2.1.1 ნიუტონის განზოგადოებული სითხეების დინამიკის მათემა- ტიკური მოდელი	51
2.1.2 ნავიე - სტოქს - დიუგემის განტოლება	53
2.1.3 ნავიე - სტოქსის განტოლება უკუმში სითხეებისათვის	54
2.1.4 ნავიე -სტოქსის განტოლება გაზებისათვის	54
2.1.5 განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო სახით	54
2.1.6 ეილერის მათემატიკური მოდელი იდეალური სითხე- ებისათვის	56
2.2 იდეალური სითხის სტაციონარული ნაკადით პროფილების გარსდენის ამოცანები	57
2.2.1 წრიული ცილინდრის პოტენციალური გარსდენა იდეალური უკუმში სითხის ნაკადით გარსდენისას	57
2.2.2 კონფორმული ასახვის მეთოდი	65
2.2.3 ელიფსური ცილინდრის გარსდენა	
2.3 ბერნულის განტოლება ბლანტი სითხეებისათვის ინტეგრალური ფორმით	70
2.4 მასის შენახვის კანონი. უწყვეტობის განტოლება	72
2.4.1 მასის შენახვის კანონი ინტეგრალური ფორმით	72
2.4.2 მასის შენახვის კანონი დიფერენციალური ფორმით, ეილე- რის ცვლადებით. (უწყვეტობის განტოლება ეილერის ცვლა- დებით)	74
2.5 ამოცანის დასმა პროფილის ოპტიმალური ფორმის საპოვნელად ბლანტ, უკუმში სითხეში	76
3. პროფილის ოპტიმალური გარსდენადი ფორმის დადგენის ვარიაცი- ული ამოცანის ამოხსნა	82

3.1 ნიუტონის მათემატიკური მოდელი და პროფილის ოპტიმალური ფორმის დადგენა	82
3.2 აირის ნაკადში, უმცირესი წინააღმდეგობის მქონე ბრუნვის სხეულის ფორმის განსაზღვრა	89
3.3 თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ბლანტი სითხით გარსდენის ამოცანის ამოხსნა არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდით	91
3.3.1 თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ბლანტი სითხით გარსდენის ამოცანის ამოხსნა არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდით სიჩქარის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას	91
3.3.2 თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ბლანტი სითხით გარსდენის ამოცანის ამოხსნა არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდით სიჩქარის პარაბოლური ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას	100
3.4 თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ქვედა საზღვრის ოპტიმიზაცია მისი ბგერამდელი სიჩქარის ნაკადით გარსდენისას	104
3.4.1 თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ქვედა საზღვრის ოპტიმიზაცია მისი ბგერამდელი, სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე სიჩქარის ნაკადით გარსდენისას	104
3.4.2 თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ქვედა საზღვრის ოპტიმიზაცია მისი ბგერამდელი, პარაბოლური ეპიურის მქონე სიჩქარის ნაკადით გარსდენისას	109
3.4.3 ოპტიმიზაციის შედეგად მიღებული პროფილის ბლანტი სითხით გარსდენის ამოცანის გათვლა	112
3.5 შემხვედრი ნაკადის სიჩქარის ეპიურის ფორმის გავლენა პროფილის გარსდენის სურათზე	115
4. ექსპერიმენტული ოპტიმალური პროფილების თეორიული მოდელირება	117
შესავალი (ექსპერიმენტის ტექნიკა).	117
4.1 ЦАГИ 846 -14 ექსპერიმენტული პროფილის გათვლა	118
4.2 NACA 4415 ექსპერიმენტული პროფილის გათვლა	124
4.3 ME163 ექსპერიმენტული პროფილის გათვლა.	130
4.4 P-III 0.15 ექსპერიმენტული პროფილის გათვლა.	135
დასკვნა	141
გამოყენებული ლიტერატურა	143
დანართი	148

ცხრილების ნუსხა

ცხრილი 1. გარსდენის რეჟიმზე სიჩქარეთა ეპიურის ფორმის გავლენის ანალიზი	116
ცხრილი 2. ЦАГИ 846 -14 პროფილის გარსდენის სურათის ანალიზი	123
ცხრილი 3. NACA 4415 პროფილის გარსდენის სურათის ანალიზი	129
ცხრილი 4. ME163 პროფილის გარსდენის სურათის ანალიზი	135
ცხრილი 5. P-III 0.15 პროფილის გარსდენის სურათის ანალიზი	140

ნახაზების ნუსხა

ნახ. 1.1	ფრთის გეომეტრიული მახასიათებლები	24
ნახ. 1.2	ფრთის პოპულარული ფორმები	25
ნახ. 1.3	ფრთა წინხედში	26
ნახ. 1.4	ფრთის ტიპური პროფილი	26
ნახ. 1.5	ფრთის პროფილთა არსებული ფორმები	27
ნახ. 1.6	შეტევის α კუთხის განსაზღვრება	28
ნახ. 1.7	წნევების განაწილება პროფილის კონტურის გასწვრივ	28
ნახ. 1.8	ფრთის პროფილზე მოქმედი ძალები	29
ნახ. 1.9	აეროდინამიკური კოეფიციენტების დამოკიდებულება შეტევის კუთხეზე	30
ნახ. 1.10	პროფილის გარსდენა ბლანტი სითხით	31
ნახ. 2.1	წრიული ცილინდრის გარსდენის სქემა	58
ნახ. 2.2	ცილინდრის უცირკულაციო გარსდენა $\Gamma = 0$	62
ნახ. 2.3	წრიული ცილინდრის გარსდენის სურათი სხვადასხვა შემთხვევაში	64
ნახ. 2.4	ნებისმიერი ფორმის კონტურის გარსდენის ამოცანის გადა- წყვეტა	65
ნახ. 2.5	ელიფსური ცილინდრის გარსდენის ამოცანა	68
ნახ. 2.6	ბერნულის განტოლების საინტერპრეტაციო სქემა	70
ნახ. 3.1	ნიუტონის მრუდი	82
ნახ. 3.2	ბრუნვის სხეული	84
ნახ. 3.3	უმცირესი წინააღმდეგობის მქონე ბრუნვის სხეული	90
ნახ. 3.4	ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული ფრთის პროფილი.....	92
ნახ. 3.5	სიჩქარეთა ველის ეპიურები პროფილის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას	98
ნახ. 3.6	წნევათა განაწილებები პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე სიჩქარის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით	

	გარსდენისას	114
ნახ. 3.23	სიჩქარეთა ველის ეპიურები პროფილის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას	114
ნახ. 3.24	წნევათა განაწილებები პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე სიჩქარის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას	115
ნახ.3.25	წნევათა სხვაობა პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის სიჩქარის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას	115
ნახ. 4.1	პირდაპირმოქმედი (ა) და შეკრული (ბ) ტიპის ბგერამდელი აეროდინამიკური მილები	117
ნახ. 4.2	ЦАГИ 846 -14 ექსპერიმენტული პროფილი	119
ნახ. 4.3	ЦАГИ 846 -14 მიღებული პროფილი	119
ნახ. 4.4	ЦАГИ 846 -14 ექსპერიმენტული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები	120
ნახ. 4.5	წნევათა განაწილებები ЦАГИ 846 -14 ექსპერიმენტული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე	121
ნახ. 4.6	ЦАГИ 846 -14 მიღებული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები	121
ნახ. 4.7	ЦАГИ 846 -14 მიღებული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები	122
ნახ. 4.8	წნევათა განაწილებები ЦАГИ 846 -14 მიღებული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე	123
ნახ. 4.9	წნევათა სხვაობა ЦАГИ 846 -14 მიღებული პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის	123
ნახ. 4.10	NACA 4415 ექსპერიმენტული პროფილი	124
ნახ. 4.11	NACA 4415 მიღებული პროფილი	125
ნახ. 4.12	NACA 4415 ექსპერიმენტული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები	126
ნახ. 4.13	წნევათა განაწილებები NACA 4415 ექსპერიმენტული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე	127
ნახ. 4.14	წნევათა სხვაობა NACA 4415 ექსპერიმენტული პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის	127
ნახ. 4.15	NACA 4415 მიღებული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები	128

ნახ. 4.16	წნევათა განაწილებები NACA 4415 მიღებული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე	129
ნახ. 4.17	წნევათა სხვაობა NACA 4415 მიღებული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე	129
ნახ. 4.18	ME163 ექსპერიმენტული პროფილი	130
ნახ. 4.19	ME163 მიღებული პროფილი	130
ნახ. 4.20	ME163 ექსპერიმენტული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები	132
ნახ. 4.21	წნევათა განაწილებები ME163 ექსპერიმენტული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე	132
ნახ. 4.22	წნევათა სხვაობა ME163 ექსპერიმენტული პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას	132
ნახ. 4.23	წნევათა განაწილებები ME163 ექსპერიმენტული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე	132
ნახ. 4.24	ME163 მიღებული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები	134
ნახ. 4.25	წნევათა განაწილებები ME163 მიღებული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე	134
ნახ. 4.26	წნევათა სხვაობა ME163 მიღებული პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის	134
ნახ. 4.27	P-III 0.15 ექსპერიმენტული პროფილი	135
ნახ. 4.28	P-III 0.15 მიღებული პროფილი პროფილი	136
ნახ. 4.29	P-III 0.15 ექსპერიმენტული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები	137
ნახ. 4.30	წნევათა განაწილებები P-III 0.15 ექსპერიმენტული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე	137
ნახ. 4.31	წნევათა სხვაობა P-III 0.15 ექსპერიმენტული პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს	138
ნახ. 4.32	P-III 0.15 მიღებული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები	139
ნახ. 4.33	წნევათა განაწილებები P-III 0.15 მიღებული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე	139
ნახ. 4.34	წნევათა სხვაობა P-III 0.15 მიღებული პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს	140

დისერტაციაში გამოყენებული აბრევიატურები

აშსა -აეროდინამიკის შეზღუდული სასაზღვრო ამოცანები

იუს -იდეალური უკუმში სითხე

მადლიერება

არ შემიძლია არ გამოვხატო მადლიერება ყველა იმ პირთა მიმართ ვინც ფიზიკურად თუ მორალურად მხარში მედგა მთელი ის პერიოდი, სანამ ამ სადირსექციო ნაშრომს დავასულელებდი.

უპირველეს ყოვლისა უღრმესად მადლიერი ვარ ჩემი ხელმძღვანელის, ბატონი თამაზ ობგაძისა, რომელსაც უდიდესი წვლილი მიუძღვის ჩემი ნაშრომის ამ სახით წარმოდგენაში, ადამიანის, რომელსაც გააჩნია დიდი მეცნიერული ალღო და გამოცდილება, პასუხისმგებლობის მაღალი გრძნობა, დადებითი პიროვნული თვისებები, მომთხოვნი და მტკიცე ხასიათი, გამოირჩევა ლიდერული თვისებებით, გამჭრიახი გონებით, არნახული ენეგიულობითა და შრომისმოყვარეობით. იგი მთელი ამ ხნის განმავლობაში არ ზოგავდა არც დროს და არც ენერგიას, ჩემს შემოქმედებით გაზრდასა და განვითარებაში. ნამდვილად დიდი მადლიერი ვიქნები მისი მთელი ცხოვრების განმავლობაში.

ჩემი ხელმძღვანელის შემდეგ ყველაზე დიდი მადლიერი ვარ ჩემი ოჯახის წევრების - მეუღლისა და შვილების, ჩემი საყვარელი მშობლების, რომლებიც ყველანაირად მიწყობდნენ ხელს და მიქმნიდნენ პირობებს, იმისათვის, რომ ნაყოფიერად მემუშავა და დროულად დამემთავრებინა ნაშრომი. მათ შორის კი გამოვარჩევ ჩემს ვაჟიშვილს, ირაკლი ქორფაშვილს, რომელმაც მართლაც რომ დიდი ფიზიკური დახმარება გამიწია ნაშრომის კომპიუტერულ რედაქტირებაში.

დიდად მადლიერი ვარ ჩემი ძვირფასი მამამთილის, გივი ქორფაშვილისა, იმ მატერიალური მხარდაჭერისთვის რომელიც მან გამიწია ამ საქმეში.

მადლობას ვუხდის ჩემთვის ძალიან ახლობელსა და საყვარელ ადამიანს, ნინო მჭედლიშვილს, რომელიც მთელი ამ ხნის განმავლობაში მხარში მედგა, მაძლევდა სასარგებლო რჩევებს და რომლის დამსახურებაა, რომ მერგო პატივი და გავხდი ბატონი თამაზის დოქტორანტი. ასევე ჩემს მეგობარს ია მოსაშვილს, რომელიც მიუხედავად იმისა, რომ ამჟამად საქართველოში არ იმყოფება, მაინც ახერხებს ჩემს დახმარებას სულიერსა თუ ფიზიკურს.

და ბოლოს, ასევე არ შემიძლია არ გამოვხატო მადლიერება ჩემი მეგობრის, ეროვნული ბიბლიოთეკის თანამშრომლის ქეთი გრძელიშვილის მიმართ, რომელიც ყოველთვის დროულად და შეუფერხებლად მაწვდიდა საჭირო მასალებსა და ლიტერატურას, რამაც საკმაოდ დიდი დრო დამიზოგა ამ ისედაც დაძაბულ პერიოდში.

შესავალი

"Человек не имеет крыльев и по отношению веса своего

тела к весу мускулов он в 72 раза слабее птицы....

Но я думаю, что он полетит, опираясь не на силу

своих мускулов, а на силу своего разума."

ეს სიტყვები ეკუთვნის დიდ რუს მეცნიერს, აეროდინამიკის ერთ-ერთ ფუძემდებელს ნ.ე. ჟუკოვსკის, რომელმაც ჯერ კიდევ მეოცე საუკუნის დასაწყისში ივარაუდა მეცნიერების ამ დარგის ელვისებური განვითარება. და მართლაც, ისევე როგორც სხვა დარგებისთვის მეოცე საუკუნე ამ დარგისთვისაც აღმოჩენა გახდა. რაიტების საფრენი აპარატიდან მძლავრ ავიალინერებამდე., ასობით თუ ათასობით სხვადასხვა ტიპის თვითმფრინავი, არნახული განვითარება სამხედრო თუ სამოქალაქო სფეროში, ეს მხოლოდ ნაწილია იმ მიღწევებისა, რაც შეიძლება ჩამოვთვალოთ ამ დარგში. თვითმფრინავის გამართულ ფრენას მრავალი სხვადასხვა მნიშვნელოვანი ფაქტორი განაპირობებს. მათგან ერთ-ერთ მთავარ ფაქტორს სწორედ ფრთა წარმოადგენს, ამიტომ ამ თვალსაზრისით ოპტიმალური ფრთის პროფილის პოვნა ერთ-ერთ აქტუალურ საკითხია. ავიაციის განვითარების თანამედროვე ეტაპისთვის დამახასიათებელია ინტერესი აეროდინამიკური პროექტირებისა და საფრენი აპარატების პროფილთა ფორმების ოპტიმიზაციის მათემატიკური პრობლემებისადმი, იმდენად, რამდენადაც თვითმფრინავის ფრთის პროფილის წარმატებულად დაპროექტებაზეა დამოკიდებული აპარატის ეფექტურობის ამაღლება და ენერგეტიკული დანახარჯების შემცირება. ფრთის პროფილების დაპროექტებასა და ოპტიმიზაციაში ერთ-ერთი ეფექტური მიდგომა ეფუძნება ჰიდროაეროდინამიკური სასაზღვრო ამოცანების გადაწყვეტას, რომელთა არსს წარმოადგენს მოცემული კონტურის გასწვრივ სიჩქარისა და წნევის განაწილებების მიხედვით პროფილის ოპტიმალური ფორმის პოვნა. სწორედ ასეთ განაწილებებით გამოისახება ძირითადი

აეროდინამიკური მახასიათებლები: ამწევი ძალა, წინააღმდეგობის ძალა და აეროდინამიკური ხარისხი. იმ შემთხვევაში, თუ ინჟინერ-დამპროექტებელი შესაბამისად განსაზღვრავს სიჩქარეთა საწყის განაწილებას, ამ ამოცანების გადაწყვეტით მას ეძლევა საშუალება მიიღოს სასურველი პროფილი.

აეროდინამიკის ოპტიმიზაციის ერთ-ერთ კლასიკურ ამოცანას წარმოადგენს მაქსიმალური ამწევი ძალის მქონე ფრთის პროფილის ამოცანის ამოხსნა. ამ ამოცანისადმი ინტერესი ჯერ კიდევ მეოცე საუკუნის დასაწყისში აღიმგრა ჟუკოვსკისა და ჩაპლიგინის მიერ და დღემდე აქტუალურია. დღესდღეობით ამწევი ძალის კოეფიციენტის მაქსიმიზაციის ამოცანების სხვადასხვა მოდიფიკაციები აქტუალურია თანამედროვე თეორიული და პრაქტიკული აეროდინამიკისათვის და ოპტიმიზაციის ახალი ანალიტიკური და რიცხვითი მეთოდებისათვის იდეალურ პოლიგონს ქმნის.

ნაშრომში აგებულია ფრთის ოპტიმალური პროფილის პოვნის ალგორითმი პროგრამა MathCad-ზე, რომელიც საშუალებას იძლევა ცნობილი ზედა საზღვრის პირობებში ვიპოვოთ ქვედა საზღვრის ოპტიმალური ფორმა, იმ მიზნით, რომ ამწევი ძალის კოეფიციენტი იყოს მაქსიმალური. ამოცანა აქტუალურია იმდენად, რამდენადაც თვითმფრინავის ფრთის გათვლა დღემდე, ძირითადად დამყარებულია ექსპერიმენტებზე აეროდინამიკურ მიღებებში, რაც დიდ დანახარჯებთანაა დაკავშირებული. არსებობს ფრთის გარსდენის ამოცანების შესწავლის პროგრამული პაკეტები COSMOS და ANSYS, მაგრამ ისინი არ იძლევიან ოპტიმალური პროფილის პოვნის საშუალებას, არამედ მხოლოდ გამოითვლიან არსებული პროფილების აეროდინამიკური მახასიათებლებს. მაშინ როდესაც, ჩვენს მიერ აგებული ალგორითმი საშუალებას გვაძლევს ვიპოვოთ როგორც აეროდინამიკური მახასიათებლები, ასევე ოპტიმალური ქვედა საზღვრი.

სამუშაოს მიზანი – თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ოპტიმიზაცია, ამწევი ძალის C_y კოეფიციენტის მაქსიმიზაციის საშუალებით, ინტეგრალური ცდომილების ფუნქციის მინიმიზაციისას. მოცემული ზედა საზღვრით უცნობი ქვედა საზღვრის პოვნა და მიღებული პროფილის გარსდენის

ამოცანის შესწავლა. მიღებული ქვედა საზღვრის გამოკვლევა მდგრადობაზე დასაშვები $\Delta = 5\%$ -იანი შეშფოთების მიმართ.

ამოცანის აქტუალობა – პროფილის ბლანტი სითხით გარსდენის შესასწავლად გამოიყენება სხვადასხვა მეთოდები: სასრულ-სხვაობათა მეთოდი, ვარიაციული მეთოდები, კომბინირებული მეთოდები და ა.შ., რომლებიც საკმაოდ რთულია. ამიტომ სათანადო გათვლები, უმეტესწილად, სრულდება ნახევრადემპირიული ფორმულების საშუალებით. მიღებული შედეგები საკმაოდ უხეშია და საჭიროებს დაზუსტებას, ამიტომ, ნაშრომში განხილული მიდგომა აქტუალურია.

კვლევის მეთოდები – არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდის გამოყენება და მისი რეალიზება კომპიუტერული სისტემა MathCad-ის საშუალებით, რომელსაც საკმაოდ მძლავრი და მოქნილი საოპტიმიზაციო პაკეტი გააჩნია.

ნამუშევრის მეცნიერული სიახლე – თვითმფინავის ფრთის პროფილის ოპტიმალური ფორმის პოვნის ვარიაციული ამოცანის დასმა და ამოცანის დაყვანა არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანაზე.

მოცულობა და სტრუქტურა – ნაშრომი შედგება:

- შესავალისაგან;
- ოთხი თავისაგან;
- 5 ცხრილისა და 75 ნახაზისაგან;
- დასკვნისაგან;
- გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხისაგან;
- დანართისგან.

ნაშრომის მოცულობა შეადგენს 161 გვერდს.

შესავალში წარმოდგენილია ნაშრომის მოკლე მიმოხილვა, აღწერილია სადისერტაციო ნაშრომის ”თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ოპტიმიზაციის” აქტუალობა, ჩამოყალიბებულია, მეცნიერული სიახლე, და კვლევის მეთოდები.

I თავში აღწერილია ობიექტი, რომლის კვლევასაც ვაწარმოებთ, კერძოდ, თვითმფრინავის ფრთა და მისი აეროდინამიკური მახასიათებლები. ზოგადად მიმოხილულია ის ფაქტორები, რომლებიც გავლენას ახდენენ ობიექტის აეროდინამიკურ მახასიათებლებზე. წარმოდგენილია ლიტერატურის მიმოხილვა, სადაც გადაწყვეტილია ფრთის პროფილის ოპტიმიზაციის ვარიაციული ამოცანები, ნაჩვენებია მათი როგორც დადებითი, ასევე უარყოფითი მხარეები. აღნიშნულია, რომ დღემდე არსებული კვლევები ძირითადად ჩატარებულია იდეალური უკუმში სითხით გარსდენის შემთხვევაში, ხოლო რაც შეეხება ბლანტი სითხით გარსდენას, აქ კვლავ რჩება რიგი პრობლემებისა.

II თავი შედგება ხუთი ქვეთავისგან. განხილულია სითხეთა დინამიკის არსებული კლასიკური მათემატიკური მოდელები, სხვა და სხვა ფორმის სხეულის, კერძოდ, წრიული და ელიფსური ცილინდრის გარსდენის ამოცანები, კონფორმული ასახვის მეთოდები, რომლებიც საშუალებას იძლევა გამოვეყნოთ გარსდენის ამოცანების ძირითადი თავისებურებანი. ნაჩვენებია, ბერნულის განტოლების უგანზომილებო სახით ჩაწერა, რომელიც ჩვენს მიერ დასმულ ფრთის პროფილის ოპტიმიზაციის ამოცანაში ერთ-ერთ მთავარ შემოფარგვლის პირობას წარმოადგენს, მასის შენახვის კანონი – უწყვეტობის განტოლება, რომელიც ასევე ერთ-ერთი შემოფარგვლის პირობაა. დასაბუთებულია მოცემული ამოცანის გადაწყვეტის აუცილებლობა, მკაფიოდ და ნათლად არის წამოდგენილი ამოცანის დასმა და ჩამოყალიბებულია მეცნიერული სიახლე.

III თავში მოცემულია ამოცანის პრაქტიკული გადაწყვეტა. პირველ-ორ ქვეთავში წარმოდგენილია მინიმალური წინააღმდეგობის მქონე ბრუნვის სხეულის ოპტიმალური ფორმის პოვნის კლასიკური ამოცანები, ხოლო დანარჩენ ქვეთავებში კი ჩატარებულია როგორც ექსპერიმენტული პროფილის გარსდენის ამოცანის გათვლა, ასევე ოპტიმალური ფრთის პროფილის პოვნისთვის საჭირო გათვლები. კერძოდ, განხილული გვაქვს ორი ალგორითმი: 1) მოცემულია ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული

თვითმფრინავის ფრთის პროფილი, რომლის უკუმში, ბლანტი სითხით გარსდენის ამოცანას ვხსნით არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდით. ვინაიდან საჭიროა ერთდროულად რამოდენიმე ფუნქციის მინიმიზაცია, კერძოდ, ინტეგრალური ცდომილების ფუნქციისა და პროფილის ზედა და ქვედა საზღვრებზე მიკვრის პირობებიდან გამომდინარე დამატებითი კინემატიკური პირობების ფუნქციებისა, ამიტომ ადგილი აქვს მრავალკრიტერიუმისანი ოპტიმიზაციის ამოცანას, რომლის შეზღუდვის პირობებად აღებული გვაქვს მასის შენახვის კანონი და ბერნულის ინტეგრალური განტოლება ბლანტი სითხეებისათვის. 2) მოცემული გვაქვს პროფილის მხოლოდ ზედა კონტური და ჩვენი ამოცანის მიზანს წარმოადგენს ოპტიმალური ქვედა კონტურის მიღება ამწევი ძალის კოეფიციენტის მაქსიმიზაციის პირობით. ამავე დროს უნდა გავითვალისწინოთ ჯამური ინტეგრალური ცდომილების მინიმიზაციის პირობაც. ორივე შემთხვევაში უნდა ამოცანა იხსნება ორი შემთხვევისთვის: როცა პროფილის გარსდენას ვახდენთ სწორხაზოვანი სიჩქარეთა ეპიურისა და პარაბოლური სიჩქარეთა ეპიურის მქონე ნაკადით. მიღებულია შედეგები და გაკეთებულია დასკვნები.

IV თავში მოცემულია ექსპერიმენტული ოპტიმალური პროფილების თეორიული მოდელირება. თავი შედგება ოთხი ქვეთავისგან. გამოსაკვლევად აღებულია ЦАГИ 846 -14, NACA 4415, ME163, P-III 0.15 პროფილები. III თავში განხილული ალგორითმის საფუძველზე მოცემული ზედა საზღვრით ნაპოვნია უცნობი ქვედა საზღვრები. ხოლო შემდეგ შესწავლილია უკვე ჩვენს მიერ მიღებული პროფილების გარსდენის სურათი. როგორც ექსპერიმენტულის, ასევე მიღებული პროფილების შემთხვევაში ჩატარებულია ამოცანის ამონახსნის მდგრადობაზე გამოკვლევა ამწევი ძალის C_y კოეფიციენტის მიმართ. კერძოდ, პროფილის ქვედა კონტურზე მინიჭებულია მცირე შეშფოთება $\Delta = 5\%$ -იანი ნაზრდი, რაც დასაშვებია პროფილის რეალური დამზადების პირობებში, გამოკვლეულია, ახდენს თუ არა ზეგავლენას აღნიშნული შეშფოთება ამწევი ძალის C_y კოეფიციენტზე. ჩატარებულია გამოთვლები და გაკეთებულია ანალიზი.

დანართში მოყვანილია მესამე თავში განხილული გათვლების პროგრამები და ოპტიმიზაციის ამოცანები, როცა მიზნის ფუნქციაში ამწევი ძალის C_y კოეფიციენტის ნაცვლად ფრთის $K = \frac{C_y}{C_x}$ ხარისხის მაქსიმიზაციაა.

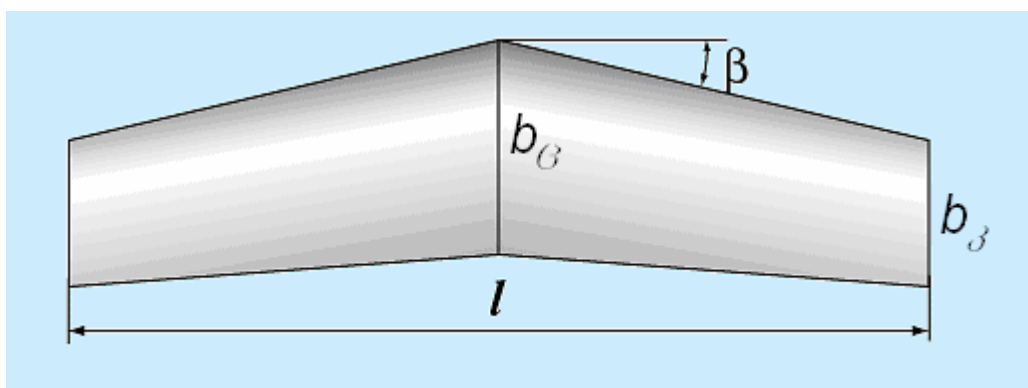
ამგვარად, დისერტაციაში წარმოდგენილი და გადაწყვეტილი ამოცანები ერთ-ერთი აქტუალური საკითხის, ოპტიმალური ფრთის პროფილის გადაჭრის საშუალებას იძლევა. მოცემული მეთოდის გამოყენება, შესაძლებელს ხდის პროფილის დაპროექტებისას მატერიალური ხარჯებისა და ასევე საკმაოდ დიდი დროის დაზოგვას.

1. არსებული ლიტერატურის მიმოხილვა

1.1. ფრთა და ფრთის პროფილები

თვითმფრინავის ფრენისას, მის ფრთაზე, ფიუზელაჟზე, და სხვა ელემენტებზე წარმოიქმნება აეროდინამიკური ძალები, რომლებიც განაპირობებენ თვითმფრინავის ჰაერში ფრენას. აეროდინამიკური მახასიათებლების თვალსაზრისით თვითმფრინავის ძირითადი კონსტრუქციული ნაწილია ფრთა. ვინაიდან ფრთებს თვითმფრინავი "დააქვს" ჰაერში, ამიტომ მათ ზოგჯერ მზიდ ელემენტებსაც უწოდებენ. ფრთის სიმძიმის ცენტრზე მოდებული სრული აეროდინამიკური ძალა იშლება ორ მდგენელად, ამწევი ძალისა და შუბლა წინააღმდეგობის ძალის მდგენელებად. სწორად ამწევი ძალა განაპირობებს თვითმფრინავის ჰაერში აწევას. ამ ძალების სიდიდე და მათი ცვლილების კანონი ფრთის გეომეტრიულ მახასიათებლებზეა დამოკიდებული. ფრთის გეომეტრიულ მახასიათებლებში იგულისხმება მახასიათებლები ზედხედში (ნახ.1.1), წინხედში (ნახ.1.3) და გვერდხედში (ნახ.1.4). [1].

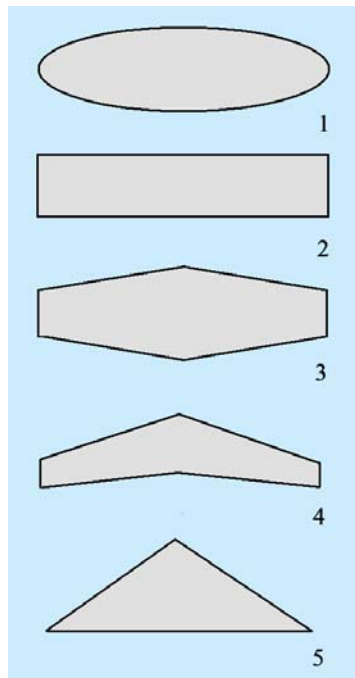
ტიპური ფრთა გეგმულში შემდეგნაირად გამოიყურება [2]:



ნახ. 1.1 ფრთის გეომეტრიული მახასიათებლები

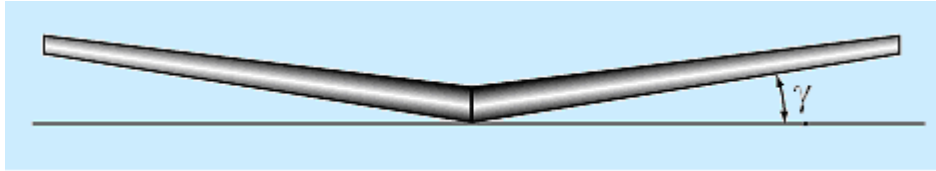
სადაც, l არის ფრთათაშორისი მანძილი ანუ ფრთის გაქანი, b_c ფუძისეული ანუ ცენტრალური ქორდა, ხოლო b_p კიდურა ქორდა. ფრთის ფართობი შემოსაზღვრულია ფრთის კონტურით. ფრთის წინა ნაწიბურსა და ძირითად

ქორდას შორის β კუთხეს უწოდებენ ისრისებურობას. ბგერამდელი სიჩქარის მქონე თვითმფრინავებისთვის იგი არ აღემატება 45° -ს, ხოლო ზებგერითისთვის 60° -ს აღწევს. ფრთის შევიწროვება ეწოდება ფუძისეული ქორდის სიგრძის შეფარდებას კიდურა ქორდის სიგრძესთან. ბგერამდელი სიჩქარის თვითმფრინავებისთვის იგი არ აღემატება 3-ს, ხოლო ზებგერითი თვითმფრინავებისთვის იცვლება საკმაოდ ფართო საზღვრებში. თანამედროვე თვითმფრინავები გეგმილში ფრთების ფორმის მიხედვით შემდეგნაირია: ელიფსური, მართკუთხა, ტრაპეციის ფორმის, ისრისებური, სამკუთხა. (ნახ.1.2)



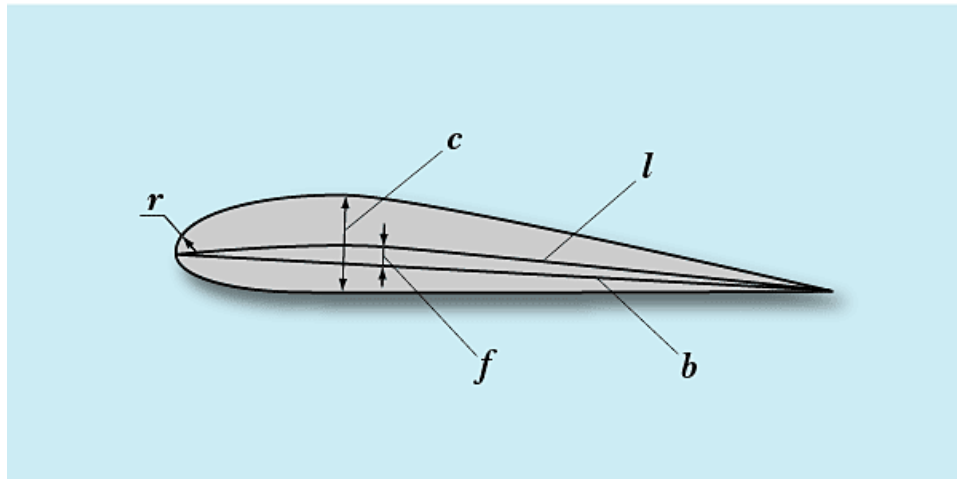
ნახ. 1.2 ფრთის პოპულარული ფორმები

ფრთის განივი V კუთხე ეწოდება γ კუთხეს ფრთის ქვედა ზედაპირსა და განივ ღერძს შორის იგი მერყეობს $+5^{\circ}$ -დან -15° -მდე. (ნახ.1.3)



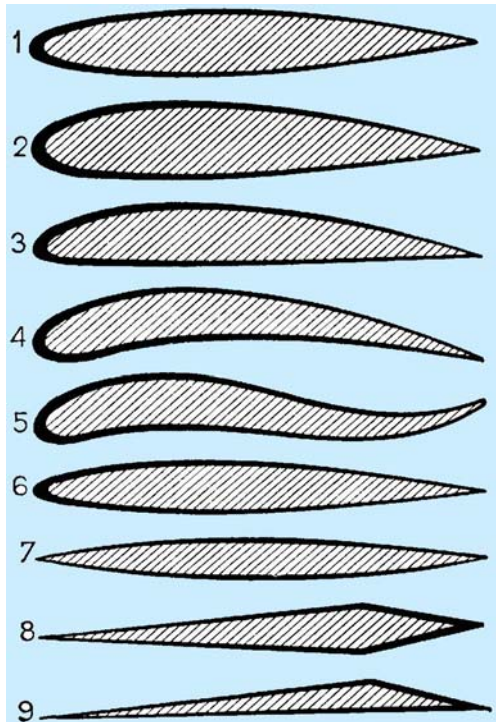
ნახ.1.3 ფრთა წინხედში

ფრთის აეროდინამიკურ თვისებებში მთავარ როლს მისი პროფილი თამაშობს. ფრთის სიმეტრიის სიბრტყის პერპენდიკულარული სიბრტყით კვეთას **ფრთის პროფილს** უწოდებენ (ანუ, პროფილი ეწოდება ფრთის განივკვეთის ფორმას.) მისი ტიპიური სურათი მოცემულია ნახ. 1.4-ზე



ნახ.1.4 ფრთის ტიპიური პროფილი

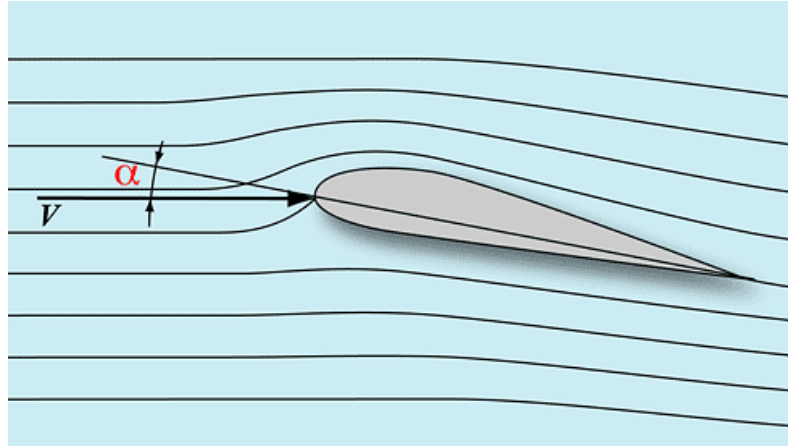
სხვადასხვა სიჩქარის თვითმფრინვებისთვის იყენებენ სხვადასხვა სახის პროფილებს. ბერამდეღ სიჩქარეზე იყენებენ წვეთისმაგვარ მდორეკონტურიან პროფილებს, რაც გამოწვეულია ჰაერის ნაკადის გარსდინების დროს, მინიმალური შუბლური წინააღმდეგობის მოთხოვნილებით. ზეზგერითზე კი იყენებენ წაწვეტებული ტიპის პროფილებს. ფორმის მიხედვით განასხვავებენ სიმეტრიულ და ასიმეტრიულ პროფილებს. ასიმეტრიული პროფილები თავის მხრივ შეიძლება იყოს ორმხრივამოზნეკილი, ბრტყელ-ამოზნეკილი, ჩაზნეკილ-ამოზნეკილი, და S-ისებრი. (ნახ.1.5)



ნახ. 1.5 ფრთის პროფილთა არსებული ფორმები

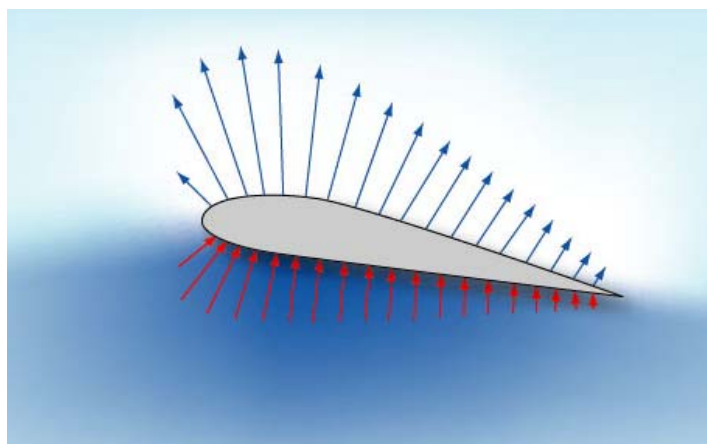
პროფილის b ქორდა ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც აერთებს პროფილის ორ ერთმანეთის პირდაპირ მდებარე ყველაზე უფრო მეტად დაშორებულ წერტილებს. (ნახ. 1.4) პროფილის უდიდეს სიმაღლეს ეწოდება პროფილის c სისქე, ხოლო მაძილს პროფილის სისქესა და წინა კიდურა წერტილს შორის – პროფილის სისქის კოორდინატი. ხაზს (l), რომელიც თანაბრადაა დაცილებული პროფილის ზედა და ქვედა კონტურებიდან უწოდებენ პროფილის შუახაზს. მაქსიმალურ f მანძილს პროფილის l შუახაზსა და b ქორდას შორის ეწოდება პროფილის სიმრუდე. პროფილის ცხვირი გამოისახება რკალით, რომლის მინიმალური რადიუსია r . მას პროფილის ცხვირის მომრგვალების რადიუსი ეწოდება.

როგორც ცნობილია, ფრთა ქმნის ამწევ ძალას, მხოლოდ მაშინ, როცა იგი მოძრაობს ჰაერთან მიმართებაში, ანუ ამწევი ძალის წარმოქმნა უშუალოდ დამოკიდებულია პროფილის ზედა და ქვედა კონტურზე ჰაერის ნაკადის გარსდინების ხასიათზე. ჰაერის ნაკადის მიმართულებასა და ფრთის ქორდას შორის კუთხეს შეტევის α კუთხეს უწოდებენ (ნახ.1.6) [3].



ნახ.1.6 შეტევის α კუთხის განსაზღვრება

ადვილი შესამჩნევია, რომ ნაკადის დეფორმაციის ხარისხი დამოკიდებულია სხეულის ფორმაზე და მის მდებარეობაზე ჰაერის ნაკადის მიმართ. იქ სადაც წირები ერთმანეთს უახლოვდება ნაკადის სიჩქარე მატულობს, ხოლო აბსოლუტური წნევა მცირდება, ხოლო სადაც სცილდება პირიქით, დინების სიჩქარე მცირდება, წნევა იზრდება. სწორად ეს არის მიზეზი იმისა, რომ პროფილის სხვადასხვა წერტილში ჰაერი ფრთაზე განსხვავებული ძალით მოქმედებს. შესაბამისად წნევაც პროფილის სხვადასხვა წერტილებში განსხვავებულია. წნევათა სხვაობას, პროფილის ზედაპირზე წნევასა და აღუშფოთველი ჰაერის ნაკადის წნევებს შორის გამოსახვევენ ვექტორული სახით (ნახ. 1.7)



ნახ. 1.7 წნევების განაწილება პროფილის კონტურის გასწვრივ.

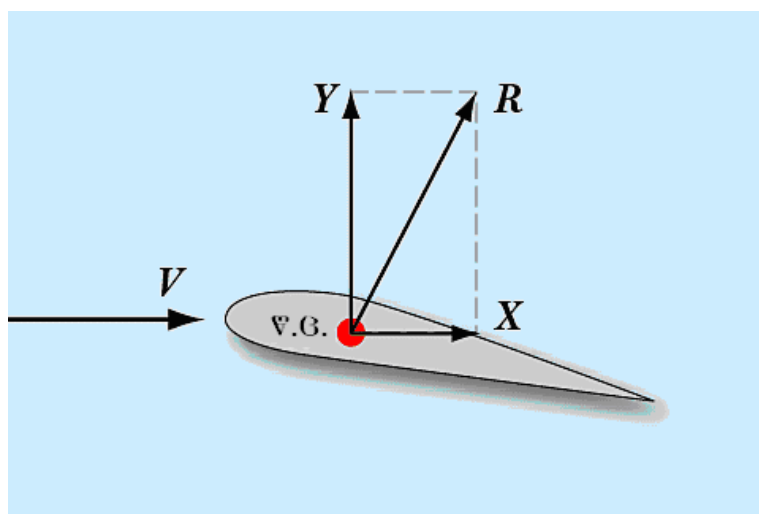
ნახაზიდან ნათლად ჩანს, რომ პროფილის ქვედა საზღვარზე შეიმჩნევა წნევის სიჭარბე, ხოლო ზედა ზედაპირზე კი გაუხშოვება, განსაკუთებით კი ურფო იქ, სადაც მაღალია ნაკადის სიჩქარე. სწორად მათი ვექტორული ჯამი წარმოქმნის სრულ აეროდინამიკურ ძალას, რომლითაც ჰაერი მოქმედებს ფრთაზე. ამ ძალის მოდების წერტილს წნევის ცენტრი ეწოდება. სრული აეროდინამიკური ძალა იყოფა ორ X და Y მდგენელად (ნახ.1.8).

Y წარმოადგენს ამწევ ძალას, ხოლო X შუბლა წინააღმდეგობის ძალას. ისინი გამოითვლება ფორმულებით:

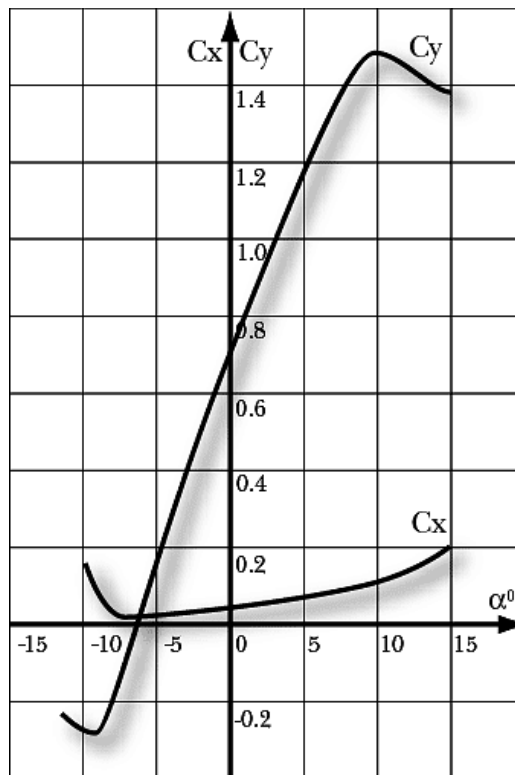
$$Y = C_y \frac{\rho v^2}{2} S , \quad (1.1)$$

$$X = C_x \frac{\rho v^2}{2} S . \quad (1.2)$$

სადაც C_y ამწევი ძალის კოეფიციენტი, C_x – წინააღმდეგობის ძალის კოეფიციენტი, $\frac{\rho v^2}{2}$ ნაკადის ჩქარული დაწნევა, ხოლო S ფრთის ფართობი. ამწევი ძალისა და წინააღმდეგობის ძალის კოეფიციენტები დამოკიდებულია შეტვის კუთხეზე. ტიპური ასიმეტრიული პროფილებისთვის ეს დამოკიდებულება შემდეგნაირად გამოისახება (ნახ.1.9):

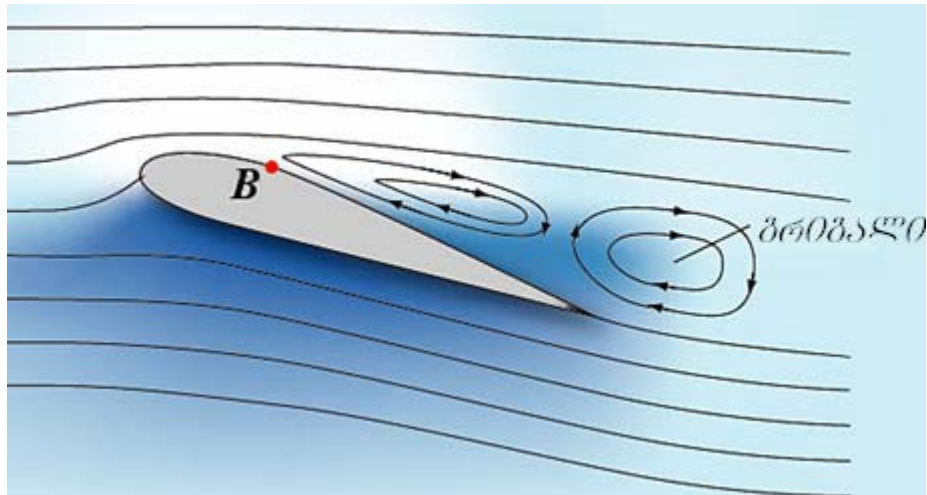


ნახ.1.8 ფრთის პროფილზე მოქმედი ძალები



ნახ. 1.9 აეროდინამიკური კოეფიციენტების დამოკიდებულება შეტევის კუთხეზე

შეტევის კუთხის ზომიერი გაზრდა იწვევს ამწევი ძალის თითქმის პროპორციულ გაზრდას. თუმცა ამწევი ძალის გაზრდა ხდება შეტევის კუთხის გარკვეულ ზღვრამდე გაზრდისას, რომლის შემდეგაც ამწევი ძალის კოეფიციენტი ეცემა. ამ დროს წარმოიქმნება პროფილის ზედა ზედაპირის წინა და უკანა ნახევარს შორის წნევათა მკვეთრი ცვლილება, რაც იწვევს პროფილის ბოლოში აგრიგალეზული ჰაერის მასების წარმოქმნას (ნახ.1.10). გარკვეულ წერტილზე ხდება ნაკადის მოწყვეტა, რის შედეგადაც ლამინარული ანუ მოწესრიგებული დინება გადადის ტურბულენტურში – მოუწესრიგებელში. წერტილს, რომელზედაც ნაკადი მოწყდება ფრთის ზედაპირს მოწყვეტის წერტილი ეწოდება, ხოლო კუთხეს, რომლის დროსაც C_y კოეფიციენტი იწყებს ვარდნას კრიტიკული შეტევის კუთხე ეწოდება.



ნახ.1.10 პროფილის გარსდენა ბლანტი სითხით.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ჰაერს გააჩნია სიბლანტე, ანუ ჰაერის ნაწილაკებს შორის არსებობს ხახუნი, მაშინ პროფილის მყარ ზედპირსა და ჰაერის ნაკადს შორის საზღვარზე წარმოიქმნება თხელი ფენა, რომელიც თითქოს ეკვრის ფრთის ზედაპირს და მოძრაობს მასთან ერთად. მას **სასაზღვრო ფენას** უწოდებენ. ამ ფენის ქცევა მკვეთრად არის დამოკიდებული ფრთის პროფილის ზომებსა და პროფილის გარსდინების სიჩქარეზე. სხვადასხვა პირობებში, ფრთის გარსდენის ხასიათზე ჰაერის სიბლანტის გავლენის ხარისხის შესაფასებლად შემოღებულია რეინოლდის რიცხვი Re , რომელიც ტოლია ფრთის ქორდის l სიგრძის (მეტრებში) გადაადგილების v სიჩქარესთან ნამრავლის, ჰაერის ν სიბლანტესთან შეფარდებისა.

$$Re = \frac{v \cdot l}{\nu}. \quad (1.3)$$

აეროდინამიკური თვალსაზრისით ფრთის ერთ-ერთი მთავარი მახასიათებელია ფრთის აეროდინამიკური ხარისხი, რომელიც ტოლია მოცემულ შეტევის კუთხეზე ამწევი ძალის C_y კოეფიციენტის, შუბლა წინააღმდეგობის ძალის C_x კოეფიციენტთან შეფარდებისა

$$K = \frac{C_y}{C_x}. \quad (1.4)$$

ფრთის აეროდინამიკური ხარისხზე ზეგავლენას ახდენს პროფი-

ლის ფარდობითი სისქე და სიმრუდე, ამასთან დიდ მნიშვნელობა ენიჭება ასევე პროფილის გარშემოწერილობისა და ცხვირის ფორმას, პროფილის მაქსიმალური სისქის მდებარეობას ქორდის გასწვრივ. პროფილის სისქის გაზრდა 12-15%-მდე ზრდის ამწევი ძალის კოეფიციენტის მაქსიმალურ მნიშვნელობას, მისი შემდგომი გაზრდა ამცირებს მას, ხოლო 20%-ზე მეტად გაზრდა მკვეთრად ზრდის შუბლა წინააღმდეგობის კოეფიციენტს. მომრგვალებული და სქელი ცხვირის მქონე პროფილის გარსდენისას წარმოიქმნება შემწოვი ძალა, რომელსაც შეუძლია შუბლა წინააღმდეგობის ძალის შემცირება. მისი სიდიდე მაქსიმუმს აღწევს შეტევის ისეთი კუთხის დროს, როდესაც შემწოვი ძალა მეტია ხახუნის ძალაზე.

მაქსიმალური აეროდინამიკური ხარისხის მისაღწევად ირჩევენ პროფილის ოპტიმალურ სისქეს, სიმრუდეს, გარშემოწერილობის ფორმასა და ფრთის დაგრძელებას. ფრთის აეროდინამიკური ხარისხზე ზეგავლენას ახდენს ასევე ფრთის ფორმა გეგმილში. ამ თვალსაზრისით ყველაზე ოპტიმალურია ელიფსური ფორმის ფრთა მომრგვალებული წინა ნაწიბურით. ასეთ ფრთას გააჩნია ყველაზე ნაკლები ინდუქტიური წინააღმდეგობა. ფრთის წაგრძელების გაზრდა ამცირებს ინდუქტიურ წინააღმდეგობას, მაშასადამე, ზრდის ფრთის აეროდინამიკურ ხარისხს. ფრთის ზედაპირის მდგომარეობა (ხორკლიანობა, ტალღურობა) ასევე ზემოქმედებს ხარისხზე, ამიტომ ზედაპირის მდგომარეობის გაუმჯობესებით შესაძლებელია მაღალი აეროდინამიკური ხარისხის მიღწევა [4].

1.2. პროფილების გათვლისა და ოპტიმიზაციის არსებული მეთოდების მიმოხილვა.

ავიაციის განავითარების თანამედროვე ეტაპისთვის დამახასიათებელია ინტერესი აეროდინამიკური პროექტირებისა და საფრენი აპარატების პროფილთა ფორმების ოპტიმიზაციის მათემატიკური პრობლემებისადმი,

იმდენად, რამდენადაც თვითმფრინავის ფრთის პროფილის წარმატებულად დაპროექტებაზეა დამოკიდებული აპარატის ეფექტურობის ამაღლება და ენერგეტიკული დანახარჯების შემცირება.

ფრთის პროფილების დაპროექტებასა და ოპტიმიზაციაში ერთ-ერთი ეფექტური მიდგომა ეფუძნება ჰიდროაეროდინამიკური სასაზღვრო ამოცანების გადაწყვეტას, რომელთა არსს წარმოადგენს მოცემული კონტურის გასწვრივ სიჩქარისა და წნევის განაწილებების მიხედვით პროფილის ოპტიმალური ფორმის პოვნა. სწორედ ასეთ განაწილებებით გამოისახება ძირითადი ეროდინამიკური მახასიათებლები: ამწევი ძალა, წინააღმდეგობის ძალა და აეროდინამიკური ხარისხი. იმ შემთხვევაში, თუ ინჟინერ-დამპროექტებელი შესაბამისად განსაზღვრავს სიჩქარეთა საწყის განაწილებას, ამ ამოცანების გადაწყვეტით მას ეძლევა საშუალება მიიღოს სასურველი პროფილი. შებრუნებული სასაზღვრო ამოცანების კონსტრუქციული ხასიათიც სწორად ამაში მდგომარეობს.

ზემოაღნიშნულმა მიდგომამ ხელი შეუწყო XX საუკუნის 80-ან წლებში. ა. ბეტცის, ვ. მანგლერის, გ. ტუმაშევის, მ. ნუჟინის და სხვა მრავალ მეცნიერთა მიღწევების განვითარებას. დღესდღეობით ამ მიმართულებით საკმაოდ ბევრი სამუშაოა შესრულებული ЦАГИ-ს (მოსკოვი), МГУ-ს (მოსკოვი), ИТПМ СО РАН (ნოვოსიბირსკი), ЦИАМ (მოსკოვი), ЦНИИ (ს-პეტერბურგი), ყაზანის უნივერსიტეტის და სხვა სამეცნიერო-კვლევითი ცენტრების მეცნიერთა მიერ, რის შედეგადაც მოხდა აეროდინამიკის შებრუნებული სასაზღვრო ამოცანათა (აშსა) თეორიის საფუძვლების ფორმულირება. ამასთან, წინა პლანზე წარმოჩინდა ისეთი პერსპექტიული მიმართულებები, როგორცაა გაწოვითა და შებერვით სასაზღვრო ფენის მართვა ფრთის პროფილების აეროდინამიკური მახასიათებლების გაუმჯობესების მიზნით, პირდაპირი და შებრუნებული სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა მრავალელემენტური ფრთის პროფილებისთვის, აეროდინამიკური პროექტირება და პროფილების ოპტიმიზაცია მოცემული გეომეტრიული შეზღუდვების პირობებში. მოცემული მიმართულების განვითარებაში უდი-

დესი წვლილი მიუძღვის კვლევებს რომლებიც ჩატარდა НИИММ-ში. მოვახ-
დინოთ ამ მეთოდების მოკლე მიმოხილვა.

XX საუკუნის 80-ანი წლებში შემუშავებული იქნა არაკორექტული
აშსა-ს რეგულარიზაციის ხერხები და მათი კვაზიამონახსნების აგება.
პირველ ეტაპზე განვითარდა მათემტიკური აპარატი და შემოთავაზებული
იქნა მოცემული მახასიათებლების მიხედვით ფრთის პროფილების ძიების
მეთოდები იდეალური უკუმში სითხის ნაკადში, იდეალური აირით
ბგერამდელი გარსდინებისას და ასევე ბლანტი სითხით მოწყვეტის გარეშე
გარსდინებისას. მთავარ შედეგად იქცა აშსა-ს კვაზიამონახსნების მეთოდი,
რომელიც უზრუნველყოფდა ამონახსნების ფიზიკურ განხორციელებადობას
საწყისი მონაცემების მინიმალურად შესაძლებელი მიზანმიმართული
კორექციის ხარჯზე. ამ ეტაპზე შემუშავდა ასევე ფრთის პროფილის გათვ-
ლების მეთოდები გართულებული ტოპოლოგიის მქონე დინებისა და სხვა-
დასხვა სახის თავისებურებების მქონე პროფილებისათვის; გამოკვლეული
და დაფუძნებული იქნა სიჩქარეთა საწყისი განაწილებების მოცემის ხერხები,
რომელიც უზრუნველყოფს გარსდინების მოუწყვეტელ ხასიათს; შემუშავე-
ბულია სიჩქარეთა განაწილების მიხედვით პროფილების აგების მეთოდი,
მოცემული შეტევის ორი კუთხისათვის. დასაბამი მიეცა თეორიულ
საფუძვლებს და ამოიხსნა უმარტივესი ამოცანები მოუწყვეტელი გარსდი-
ნების მქონე ფრთის პროფილების აეროდინამიკურ ოპტიმიზაციის სფეროში.

XX საუკუნის 90-იან წლებში ეს კვლევები გაღრმავებული იქნა
გარსდინების უფრო რთული მოდელებისათვის. აეროდინამიკის შებრუ-
ნებული სასაზღვრო ამოცანები (აშსა) განხილულ იქნა სხადასხვანაირი
მექანიზაციის მქონე ფრთის პროფილებისთვის და ნაკადის მართვის სხვადა-
სხვა მოწყობილობების პირობებში. ჩატარდა აშსა-ს ამოხსნების განზოგადება
შელწევადი და შეუღწევადი პროფილებისთვის, აირის კუმშვადობის გათვა-
ლისწინებით. დიდი ყურადღება დაეთმო დასაპროექტებელი პროფილების
ფორმების და ნაკადის მართვის მოწყობილობების პარამეტრების ოპტიმი-
ზაციას, ამწევი ძალის კოეფიციენტის გაზრდისა და წინააღმდეგობის ძალის

მინიმიზაციის მიზნით. აშსა-ს მეთოდები გამოყენებულია სტატიკურად მდგრადი პროფილების პროექტირებისათვის. ბოლო დროს, დაისვა და გადაწყდა აშსა-ს მრავალი საინტერესო აქტუალური ამოცანა ფრთის პროფილებისათვის ბრტყელი, სწორხაზოვანი ეკრანის მიდამოში.

ამ სამუშაოების შედეგად შესაძლებელი გახდა [5-7] მონოგრაფიების გამოქვეყნება.

1998-2002 წწ-ებში აშსა-ს კვლევები გაგრძელდა შემდეგი მიმართულებებით:

– მექანიზირებული ფრთის პროფილების აეროდინამიკური სრულყოფა და ფრთის ფორმის ოპტიმიზაციის მათემატიკური პრობლემები.

– თვითმფინავისა და ეკრანოპლანის ფრთის პროფილების, საფრენი აპარატების მზიდი ელემენტების ოპტიმიზაცია და პროექტირება სასაზღვრო ფენის მართვის გათვალისწინებით..

ფრთის აეროდინამიკური მახასიათებლების გაუმჯობესების, კერძოდ, მოუწყვეტელი გარსდინებისას, მაღალი ამწევი ძალის მიღების ერთ-ერთ ხერხს წარმოადგენს სასაზღვრო ფენის ოპტიმალური მართვა გაწოვისა და შებერვის მოწობილობებით. ცნობილია ასეთი მოწყობილობების სხვადასხვა მათემატიკური მოდელები, რომელთა ნაწილი გამოყენებულია აშსა-ს გადაწყვეტისას [5]. ამაჟამად გადაწყვეტილია მთელი რიგი ახალი ამოცანებისა:

შრომათა პირველი სერია უკავშირდება შიდა ნაკადის შერჩევის, კერძოდ, გამწოვის მოდელირების სხვადასხვა ვარიანტებს. ეს უკანასკნელი წარმოადგენს სასაზღვრო ფენის მართვის ერთ-ერთ ხერხს, რომელიც მიმართულია აეროდინამიკური მახასიათებლების გასაუმჯობესებლად. XX საუკუნის დასაწყისიდან ლ. პრანდტლის, ო.შრენკის, ვ. პფენინგერის, გ.ლახმანის, ლ.ვუდსის და სხვათა მიერ ჩატრებულმა მრავალრიცხოვანმა თეორიულმა და ექსპერიმენტულმა კვლევებმა აჩვენა ფრთის პროფილებზე სასაზღვრო ფენის გამწოვის გამოყენების ეფექტურობა. თუ გაწოვა ხდება ხდება უკანა ნაწიბურის ახლოს, მაშინ ნაკადი აგძელებს მიკვრას ფრთის

პროფილის ზედაპირზე შეტევის საკმაოდ მაღალი კუთხეების დროსაც, ვიდრე გაწოვის არარსებობის შემთხვევაში, რის შედეგადაც ამწევი ძალა მატულობს. გარდა ამისა სასაზღვრო ფენის განაწილებული გაწოვა ასტაბილურებს ლამინარულ მოსაზღვრე შრეს და თავიდან აცილებს ან აფრეხებს ლამინარული დინების ტურბულენტურში გადასვლას, რაც თავის მხრივ იწვევს ხახუნის შემცირებას.

ნაკადის გაწოვისა და შებერვის მოწყობილობების მოდელირების ერთ-ერთ უმარტივეს ხერხს წარმოადგენენ წერტილოვანი განსაკუთრებულობები. ადრე გამოქვეყნებული შრომებიდან, ცნობილია, რომ ყველა გლუვ შეულწევად კონტურებსა და ერთსადინარიანი ან ერთწყაროიანი კონტურებს შორის ამწევი ძალის მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღწევა წრეწირზე. [8] შრომაში განხილულია საერთო შემთხვევა - გამოკვლეულია მაქსიმალური ამწევი ძალის მქონე მოცემული სიგრძის გლუვი, შეკრული, კონტურის პოვნის ამოცანა იდეალური უკუმში სითხის მდორე ნაკადით გარსდინებისას, კონტურზე წერტილოვანი განსაკუთრებულობების (წყაროების და სადინრების) არსებობის დროს და ამ კონტურზე კრიტიკული წერტილების (წერტილების, სადაც სიჩქარე მიისწრაფის ნულისკენ) განლაგების პირობებში. მოცემულია შესაბამისი ოპტიმიზაციის ამოცანის მათემატიკური ფორმულირება, რომლის ამოხსნა დაიყვანება ორ უფრო მარტივ ამოცანაზე, რომლებიც ზოგადად გამოკვლეული იქნა რიცხობრივად. განხილულია ცალკეული შემთხვევები და ნაჩვენებია, რომ ყველაზე დიდი ცირკულაცია მიიღწევა წრეზე, ყველა სადინრის ერთ სადინრად, ხოლო ყველა წყაროების ერთ წყაროდ შერწყმისას. გაკეთებულია დასკვნა, რომ განსაკუთრებულობის არსებობა შესაძლებელს ხდის მაქსიმალური ამწევი ძალის გაზრდას იმ მნიშვნელობამდე, რომლის მიღწევაც შეუძლებელია შეულწევად კონტურებზე.

გარე ნაკადის ხვრელური მართვა (გაწოვა, შებერვა) საშუალებას იძლევა მიღებული მათემატიკური მოდელების ჩარჩოებში, შეულწევად პროფილებთან შედარებით, მნიშვნელოვნად გაზარდოს ფრთის პროფილის

ამწევი ძალა და ამავედროულად მოახდინოს გარსდინების მოუწყვეტობის შენარჩუნება. პრაქტიკული თვალსაზრისით მნიშვნელოვანია ისეთი პროფილების პროექტირება, რომელთაც ექნებათ სასურველი აეროდინამიკული მახასიათებლები შეტევის კუთხის ცვლილების მოცემულ დიაპაზონში. [9]-ში დასმულია და გადაწყვეტილია აშსა-ს ამოცანა ისეთი პროფილებისთვის, რომელთაც გააჩნიათ პროფილის კონტურზე მოცემული სიჩქარეთა განაწილებისას გარე ნაკადიდან ჰაერის ხვრელური მართვის მოწყობილობა, რაც უზრუნველყოფს შეტევის კუთხის ცვლილების მოცემულ დიაპაზონში მოუწყვეტელ გარსდინებას შემოთავაზებულია იდეალური უკუმში სითხეების (იუს) მოდელების ჩარჩოებში ასეთი პროფილების პროექტირების რიცხვითი-ანალიტიკური მეთოდები. სამეზნი პროფილის მოუწყვეტელობა მიიღწევა სიჩქარეთა მოცემული განაწილებიდან გარსდინების მოცემულ ორ რეჟიმში იმ უბნების გამორიცხვით, რომელზედაც შესაძლებელი იყო სიჩქარეთა ვარდნა. პროფილის გარსდინების რეჟიმი განისაზღვრება არა მხოლოდ შეტევის კუთხის სიდიდით, როგორც შეუღწევადი პროფილების შემთხვევაში, არამედ წართმეული ნაკადის ხარჯვის სიდიდითაც. ხვრელის მოდელირება ხდება კედლებზე მუდმივი სიჩქარეებიანი წრიული არხით. აშსა-ს ამოხსნადობის პირობების დასაკმაყოფილებლად გამოიყენება სიჩქარის საწყის განაწილებაში თავისუფალი პარამეტრების შეყვანის მეთოდი. მოყვანილია შებრუნებული ამოცანების ამოხსნის კონკრეტული მაგალითები.

აეროდინამიკის შებრუნებული სასზღვრო ამოცანები იდეალური უკუმში სითხის მოდელების ჩარჩოებში გარე ნაკადის განაწილებული გაწოვისას ამოხსნილ იქნა 1994 წლებში [5]. ფრთის პროფილების აგების სქემა შეიძლება გამარტივდეს, მხოლოდ მოსაზღვრე შრის გაწოვისას, თუ ჩავთვლით გამოდევნის ნახევარსხეულს შეუღწევადად. ამასთან მთავარი ყურადღება უნდა დაეთმოს საწყისი სიჩქარის მოცემის ხერხს, რომელიც საშუალებას მოგვცემს გაწოვის სიჩქარის მოცემული კანონისას მიღწეულ იქნეს გარსდი-

ნების მოუწყვეტელობა და სასაზღვრო ფენის ტურბულენტურ მდგომარეობაში გადაუსვლელობა.

[10] ნაშრომში აშსა-ს თეორიაზე დაყრდნობით და რიცხვითი ანალიტიკური მეთოდის გამოყენებით, დასმულია და გადაწყვეტილია განაწილებული გაწოვის მქონე სასაზღვრო ფენიანი ფრთის პროფილის პოვნის ამოცანა. საწყის მონაცემებად აღებულია სიჩქარეთა განაწილება საძებნი პროფილის საზღვრის გასწვრივ, კონტურის რკალის კოორდინატების ფუნქციის სახით. მოყვანილია პროფილის აგების მაგალითები ამწევი ძალის მაღალი კოეფიციენტებით, მოწყვეტის სასაზღვრო ფენის შრის განაწილებული გაწოვის გამოყენების ეფექტურობა პროფილის აეროდინამიკური მახასიათებლების გასაუმჯობესებლად.

იმის გამო, რომ სასაზღვრო ფენის გაწოვაზე იხარჯება ენერგია, გაწოვის მოწყობილობის მოხმარების ეფექტურობის ასამაღლებლად, აქტუალურ ამოცანას წარმოადგენს თვით გაწოვის მოწყობილობის ოპტიმიზაცია. ნაშრომში [11,12] განხილულია ფრთის პროფილის ზედაპირის გარკვეული უბნების გარსდინება მასზე მოცემული გარე დინების სიჩქარეთა განაწილების კანონით, რეინოლდსის მოცემული რიცხვისათვის. საპოვნია გაწოვის სიჩქარეთა განაწილება იმ პირობით, რომ სიბლანტის წინააღმდეგობის კოეფიციენტისა და ენერგეტიკული დანახარჯების წინააღმდეგობის ექვივალენტური კოეფიციენტების ჯამი იყოს მინიმალური. ენერგეტიკული დანახარჯების წარმოქმნას იწვევს სისტემაში გაწოვის შეტანა. სასაზღვრო ფენის გათვლისათვის გამოიყენება ეპლერის მეთოდი, რომელიც მოიცავს ორი დიფერენციალური განტოლების – იმპულსების და ენერგიის განტოლებების ამოხსნას. ოპტიმიზაციის ამოცანა გადაყვანილია ოპტიმალურ მართვის ამოცანის ტერმინებში. სასაზღვრო ფენის გაწოვის სიჩქარე აღებულია მმართველ ფუნქციად. პონტრიაგინის მაქსიმუმის პრინციპის გამოყენებით ამოცანა დაიყვანება პირველი რიგის არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ინტეგრირებაზე უცნობი პარამეტრებით.

როგორც ცნობილია გლუვ, ჩაკეტილ, ფიქსირებული სიგრძის მქონე კონტურებს შორის უდიდესი ცირკულაცია და შესაბამისად, ამწევი ძალა მიიღწევა წრეწირზე მაშინ, როცა ნაკადის დამუხრუჭებისა და აცდენის ჩამოსვლის წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა, მაგრამ რეალური მაღალმზიდი ფრთის პროფილის პროექტირებისას საჭიროა შემოვიტანოთ დამატებითი შეზღუდვები, რომლებიც უზრუნველყოფენ მოუწყვეტელ გარსდინებას. ნაშრომში [13] პროფილის კონტურზე გარსდინების მოუწყვეტელობის უზრუნველსაყოფად საჭიროა, ისეთი გარე ნაკადის შერჩევის მოწყობილობა, რომელიც საშუალებას მოგვცემს სიჩქარეთა განაწილებიდან გამოირიცხოს სიჩქარეთა ვარდნის ის უბნები, სადაც შესაძლებელია ნაკადის მოწყვეტა. ამოხსნილია გარე ნაკადის შერჩევის მოწყობილობის მქონე ფრთის პროფილის ფორმის ოპტიმიზაციის ამოცანა ამწევი ძალის C_y კოეფიციენტის მაქსიმალური მნიშვნელობის მისაღწევად. ნაკადის სიბლანტის გავლენა გათვალისწინებულია სასაზღვრო ფენის მოდელის ჩარჩოებში. შებრუნებული ამოცანის ამოხსნის საფუძველზე, შედგენილია ალგორითმი და პროგრამა C_y ოპტიმიზაციისთვის ზანგვილის მეთოდის გამოყენებით. მოცემულია მაღალმზიდი ფრთის პროფილების აგების მაგალითები, მაშინ როცა პროფილზე მაქსიმალური ფარდობითი სიჩქარეები ტოლია 2.0; 2.2; 2.5 და შესაბამისად $C_y = 3.314; 4.492; 6.020$.

საფრენი აპარატების აეროდინამიკული მახასიათებლების გაუმჯობესებაში უდიდეს როლს წარმოადგენს წვევის ძალისა და ამწევი ძალის წარმომქმნელი სისტემების შერწყმა. ამ მიზნით გამოიყენება გარე ნაკადზე რეაქტიული ჭავლის გამოწოვა. ფრთისა და ფრთაუკანის ზედა ზედაპირის ასეთი ჭავლით გარშემოებერვა კოანდის ეფექტის, "სუპერ ცირკულაციისა" და "ჭავლური ფრთაუკანას" თანახმად ახდენს ამწევი ძალის გაზრდას.

[14] ნაშრომში დასმულია და გადაწყვეტილია ფრთის პროფილის ფორმის პოვნის ამოცანა რეაქტიული ჭავლის საბოლოო ზომების ხვრელიდან გამობერვით, რომლის მოდელირება ხდება კედლებზე მუდმივი სიჩქარის მქონე სწორხაზოვანი ან წრიული არხით. გამოყენებულია იუს-ის მოდელი,

რომელშიც გამოსაბერი ჭავლისა და გარე ნაკადის სიმკვრივეები და სრული წნევები სხვადასხვაა. ამის შედეგად ნაკადის აცდენის ხაზებზე წარმოიქმნება სიჩქარეთა მდგენელების გაყოფა. ამოცანა დაიყვანება აშსა-ზე უბან-უბან ანალიტიკური ფუნქციისთვის. შემუშავებულია მისი გადაწყვეტის იტერაციული მეთოდი, მოყვანილია ფრთის პროფილების აგების მაგალითები გაწოვილი ჭავლის განსხვავებული პარამეტრებისთვის მოუწყვეტელი გარსდინებისას.

რ. ფ. მარდანოვის [15] მიერ დასმულია და ამოხსნილია აშსა ეკრანო-პლანის ფრთის პროფილისთვის გარე ნაკადში რეაქტიული ჭავლის გამობერვით, ანუ ბრტყელი ეკრანის მახობლობაში ფრთის პროფილის აგების ამოცანა სიჩქარეთა მოცემული განაწილებისას $v(\gamma)$ ($\gamma \in [0, 2\pi]$ -კანონიკური პარამეტრია). გამოსაბერი ჭავლისა და გარე ნაკადის სიმკვრივე და სრული წნევები განსხვავებულია. ჭავლის გამოსაბერი მოწყობილობის მოდელირება ხდება უსასრულოფურცლოვანი კედლებზე მუდმივსიჩქარიანი წრიული არხით. აშსა-ს ამოხსნადობის პირობები (ფრთის პროფილის შეკრულობა და გარშემოდენილი ნაკადის სიჩქარის თანხვედრა ნაკადის მოცემულ სიჩქარეზე უსასრულობაში) კმაყოფილდება მოცემულ სიჩქარეთა განაწილებაში თავისუფალი პარამეტრების შერჩევის საშუალებით. შემუშავებულია ამოხსნის იტერაციული პროცესი, ჩატარებულია სერიული გათვლები გამოსაბერი ჭავლის სხვადასხვა პარამეტრებისთვის, აგებულია ფრთის პროფილები და გამოთვლილია მათი აეროდინამიკური მახასიათებლები.

ს.ე. ბელოუსოვის და ი. ბ. ილინსკის [16] მიერ დასმულია მრავალკრიტიკული ოპტიმიზაციის ამოცანა ერთიანი კომპლექსის "ფრთა-ამძრავის" აეროდინამიკური მახასიათებლებისთვის. კომპლექსი მოიცავს გარე ნაკადის ნაწილის შერჩევას კედლებზე მუდმივსიჩქარიან წრიულ არხში და რეაქტიული ჭავლის გამობერვას სწორხაზოვანი არხით ცხვირა ნაწილიში. პროფილის კონტური ქვედა ზედაპირი ფიქსირდება, ხოლო ზედაზე მოიცემა სიჩქარის უბან-უბან მუდმივი განაწილება, რომელიც უზრუნველყოფს პროფილის მოუწყვეტელი იუს-ს პოტენციალური ნაკადით გარსდინებას.

აეროდინამიკური პარამეტრების ოპტიმიზაცია, კერძოდ, ამწევი ძალის კოეფიციენტის მაქსიმიზაცია და პროფილის წინააღმდეგობის მინიმიზაცია მიიღწევა თავისუფალი პარამეტრების და კანონიკური არის პარამეტრების ხარჯზე. თავისუფალი პარამეტრების შეყვანა ხდება სიჩქარის მოცემულ განაწილებაში. აგებულია ფრთის პროფილისა და პროფილიდან აცდენილი, გამობერილი ჭავლის წარმომშობი გარემოს გამყოფი ხაზების პოვნის იტერაციული პროცედურა. შებრუნებული ამოცანის ამოხსნადობის პირობების შესასრულებლად, ძირითადი იტერაციული პროცესის შიგნით ორგანიზებულია მეორე პროცესი. მოყვანილია ასეთი პროფილების აეროდინამიკური მახასიათებლების ფორმულები და რიცხვითი გათვლების შედეგები, რომლებიც ლ. ი. სედოვის და გ. ი. სტეპანოვის ტერმინოლოგიის თანახმად მიმართულია ერთიანი კომპლექსი "ფრთა-ამძრავის" შესასწავლად..

სამუშაოთა მეორე სერია უკავშირდება მრავალელემენტური პროფილების, საფრენი აპარატების მზიდი ელემენტების პროექტირებას მრავალკავშირიან არეებში, უბან-უბან ანალიტიკურ ფუნქციებში. ამ სირთულეების არსებობას მივყავართ მათემატიკურ სირთულეებთან, რომლთა გადასალახად აუცილებელია სხვადასხვაგვარი მიდგომა.

შრომაში [17] გადაწყვეტილია ფრთის პროფილის ამოხსნის ამოცანა სისქისა და დატვირთვის მოცემული განაწილებით, x აბსცისის ფუნქციის სახით. ამოცანის ასეთმა დასმამ შესაძლებელი გახადა აშსა-სთვის დამახასიათებელი საძებნი კონტურის შეკრულობის პრობლემისა და ამონახსნის ერთფურცლიანობის მოხსნა, რომელიც აღიძვრებოდა კონტურის რკალის აბსცისის პარამეტრის სახით გამოყენებისას. შემუშავებულია ამოხსნის რიცხვითი-ანალიტიკური მეთოდი და მოყვანილია ტესტური გათვლების შედეგები, რომლებიც გვიჩვენებს იტერაციული პროცესის კრებადობას და მის სიზუსტეს. გარდა ამისა გამოკვლეულია სტატიკურად მდგრადი პროფილის პროექტირების ამოცანა.

ფრთის პროფილების თეორიაში გამოყოფენ სამ ძირითად ამოცანას: პირველი – დინების ველებისა და აეროდინამიკური მახასიათებლების გათვ-

ლების ამოცანა მოცემული პროფილისთვის; მეორე – შებრუნებული ამოცანა, როცა დინების ველი და პროფილის ფორმა განისაზღვრება პროფილის კონტურზე მოცემული განაწილებული წნევისა და სიჩქარეების მიხედვით; მესამე – შერეული ამოცანა; მასში ნაწილი კონტურისა ცნობილია, ხოლო ნაწილი მოიცემა განაწილებული წნევებისა და სიჩქარეების მიხედვით. პირველი ორი ამოცანა წარმოადგენს შერეული ამოცანის ზღვრულ შემთხვევებს, ამიტომ შესაძლებელი გახდა სამივე შემთხვევისთვის შემოთავაზებული ყოფილიყო ამოცანის საერთო დასმა და შემუშავებულიყო უნივერსალური რიცხვითი პროცედურა მხოლოდ იუს-ის მოდელების ჩარჩოებში [5]. მოგვიანებით წმინდა შებრუნებული ამოცანის ამოხსნისას შესაძლებელი გახდა ნაკადის სიბლანტის გათვალისწინება სასაზღვრო ფენის მოდელების მიხედვით. ამ შრომების [18] განვითარებამ განაზოგადა შერეული ამოცანების ამოხსნის მეთოდი პროფილის უკუმში ბლანტი სითხით მოუწყვეტელი გარსდინებისას, მაღალი რეინოლდსის რიცხვის დროს; შემოთავაზებულია ამოცანის რიცხვითი-ანალიტიკური ამოხსნის მეთოდი პროფილის კონტურის უცნობ ნაწილზე წნევათა განაწილების მიხედვით, ამავე უცნობი ნაწილის საპოვნელად. უკუმში ნაკადის სიბლანტეს ითვალისწინებენ სასაზღვრო ფენის მახლობლობაში, პროფილის უკან აეროდინამიკური კვალის მოდელირება ხდება დენის ორი კონგრუენტული ხაზით. შემუშავებულია ამოხსნის იტერაციული პროცედურა, აგებულია პროფილის კონტურის საძიებელი ნაწილის პოვნის ალგორითმი, მოყვანილია რიცხვითი გათველების მაგალითები.

მოგვიანებით გაირკვა, რომ ფრთის მრავალელემენტური პროფილები ხასიათდებიან უკეთესი აეროდინამიკური მახასიათებლებით, ვიდრე ცალელემენტური პროფილები. ფრთის მრავალელემენტური პროფილების ამოცანები აქტუალური რჩება აეროდინამიკის სპეციალისტებისთვის უკვე ნახევარი საუკუნის მანძილზე. შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანების სირთულე განპირობებულია დინების არის ორადბმულობით.

დ. ფ. აბზალილოვისა და პ. ა. ვოლკოვის [19] მიერ იუს-ის მოდელების ჩარჩოებში ამოხსნილია ბიპლანის პროფილის კონტურის აგების ამო-

ცანა. საწყის მონაცემებად გადაიცემა კონტურზე სიჩქარეთა განაწილებები, როგორც რკალის რკალის აბსცისის ფუნქციები, ხოლო კანონიკურ არედ შეირჩევა რგოლი $1 < \xi < R$. მიდგომის არსი მდგომარეობს კანონიკურ არეზე, ფიზიკურ არეში ორადბმული კონფორმული ასახვის ფორმაში. კანონიკურ არეში $w(\zeta)$ დინების კომპლექსური პოტენციალი ჩაწერილია სახით, რომელიც შეიცავს, 10 უცნობ პარამეტრს, რომელთა საპოვნელად შედგენილია არაწრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა. სიჩქარეთა საწყისი განაწილებები ისეთნაირადაა ამორჩეული, რომ გარანტირებული იყოს ნაკადის მოუწყვეტელობა სასაზღვრო შრის მოდელების ჩარჩოებში. აშსა-ს ამოხსნადობის პირობების დაკმაყოფილებისთვის გამოყენებულია თავისუფალი პარამეტრების შეყვანის მეთოდი. ჩატარებულია როცხვითი გათვლები.

დ. ფ. აბზალილოვის მიერ იუს-ის ჩარჩოებში განხილული იქნა აშსა ეკრანის თავზე ფრთის პროფილის გარსდინების რეჟიმის დიაპაზონისთვის [20]. უნდა აღინიშნოს, რომ ყოველი ასეთი დიაპაზონი განისაზღვრება არამხოლოდ α შეტევის კუთხით, ისე როგორც პროფილისთვის შემოსაზღვრულ ნაკადში, არამედ h სიდიდითაც, რომელიც წარმოადგენს დაშორებას პროფილის უკანა ნაწიბურიდან ეკრანამდე. პროფილის კონტური დაყოფილი იქნა რამოდენიმე უბნად, თითოეულ მათგანზე მოცემული იქნა სიჩქარეთა განაწილება, როგორც γ პარამეტრის ფუნქცია. γ პარამეტრი კი წარმოადგენს კანონიკურ სიბრტყეში რკალის აბსცისას. დეტალურად შესწავლილია ორი უბნის შემთხვევა: როცა ზედაპირზე სიჩქარე გადაიცემოდა α_1 და უკანა ნაწიბურიდან ეკრანამდე h_1 მანძილისთვის, ხოლო ქვედაზე შესაბამისად α_2 შეტევის კუთხისა და h_2 მანძილისთვის. ამოცანის ამოხსნისთვის აგებულია იტერაციული პროცესი, რომლის თითოეულ ბიჯზე ხდება ეკრანოპლანის ფრთის პროფილის აგების ამოცანის ამოხსნა გარსდინების ერთი რეჟიმისთვის. მოცემულია პროფილების რიცხვითი ანალიტიკური აგების მაგალითები, რომელთაც გააჩნიათ მოუწყვეტელი გარსდინება როგორც გაანგარიშებულ (h_1, α_1) და (h_2, α_2) რეჟიმებისას, ასევე $(h \in [h_1, h_2], \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2])$ დიაპაზონზე.

შრომაში [21] დასმულია და ამოხსნილია ეკრანოპლანის ფრთის ისეთი პროფილის აგებისა და აეროდინამიკური გათვლების ამოცანა, რომლის დროსაც ფრთის პროფილი უკანა ნაწიბურით სრიალებს ბრტყელ, ჰორიზონტალურ ეკრანზე. პროფილის კონტურის ქვედა მხარე ცნობილია და წარმოადგენს წრფივ მონაკვეთს, რომელიც ეკრანთან ქმნის მოცემული სიდიდის კუთხეს, ხოლო ზედა მხარე მოიძებნება სიჩქარეთა მოცემული განაწილების მიხედვით. ეს განაწილება აიღება ჰიდროდინამიკურად შესაბამისი განაწილებების კლასიდან, რომელიც იძლევა ფრთის პროფილის ნაკადის მოუწვეტელობის გარანტიას დინების მათემატიკური მოდელის მიღებულ ჩარჩოებში. აღწერილი ამოცანა დაიყვანება შერეულ სასაზღვრო ამოცანაზე ნახევარსიბრტყეში, რომელიც ამოხსნილია ანალიტიკური ფორმით. ამწევი ძალის კოეფიციენტის გამოსათვლელად შემოტანილია წვრილი ჭავლის არსებობის დაშვება, რომელიც მიედინება პროფილის კონტურის ცხვირა ნაწილში ჰორიზონტალურ ნაწილსა და ეკრანს შორის. გამოიკვლევა ამ ჭავლში წნევის ვარდნის (დამუხრუჭების წნევიდან გამოსასვლელში წნევამდე) გავლენა ამწევი ძალის კოეფიციენტზე. ჩატარებული გათვლების საფუძველზე გაკეთებულია დასკვნები იმის შესახებ, თუ რა გავლენას ახდენს წრფივი უბნის დახრის კუთხე ოპტიმალური პროფილის კონტურის ფორმაზე; ნაჩვენებია აგრეთვე, თუ როგორ მოქმედებს დახრის კუთხე და პროფილზე მაქსიმალური სიჩქარის სიდიდე მის ფორმასა და ამწევი ძალის კოეფიციენტზე.

ა.ვ. პოტაშევისა და ი. ხ. ხაბიბოვის მიერ [22] განხილულია მაღალმზიდი სამოდელი პროფილების აგების ორი ამოცანა, რომლებზედაც რეალიზდება წმინდა ცირკულაციური გარსდინება იუს-ის ნაკადით. პირველ ამოცანაში გამოკვლეულია გრიგალწყაროს იდეალურად უკუმში სითხის ბრტყელი, პარალელური პოტენციალური ნაკადით გარსდინება. ამასთან პროფილის კონტურს უკან აღებულია ასეთი დინების დენის ხაზებიდან ერთ-ერთის ნაწილი. შედეგად მიღებულია "ლოკოკინის" ფორმის მქონე კონტური, რომელშიც ხვრელის გავლით ხორციელდება ნაკადის გამობერვა.

ასევე აგებული იქნა ისეთი ოპტიმალური პროფილი, რომლის ზედაპირის 90%-ზე მეტს გარსშემოედინებოდა მოუწყვეტელი ნაკადი. მეორე ამოცანაში განხორციელებულია ანალოგიური კონტურის აგების მცდელობა, რომლის გარსდინება იქნებოდა მთლიანად მოუწყვეტელი. ეს ამოცანა დაყვანილი იქნა ძირითად აშსა-ზე იდეალური უკუმში სითხეებისთვის. ხვრელი, საიდანაც ჭავლი მოდელირდება კედლებზე მუდმივი სიჩქარის მქონე უსასრულო-ფურცლოვანი წრიული არხით. ბერნულისა და გამოსაბერი ჭავლის კონსტანტები ტოლია. მოცემულია ანალიტიკური ამოხსნა და ჩატარებულია რიცხვითი გათვლები.

ო. ს. ნებეროვის მიერ [23] ამოხსნილია აეროდინამიკური მახასიათებლების გაუმჯობესების მიზნით ჟუკოვსკის პროფილების მოდიფიკაციის ამოცანა. ასეთი მოდიფიკაციისას საძიებელი კონტურის ზედა ზედაპირზე სიჩქარეთა განაწილების შეცვლა ხდებოდა მოუწყვეტელით. ამის შედეგად სიჩქარეები პროფილის ქვედა და ზედა ზედაპირზე ნაკადის აცდენის წერტილებში ხდებიან განსხვავებულნი, ხოლო თვით კონტური უკანა ნაწიბურის მიდამოებში აღიწერება ლოგარითმული სპირალით. ამის თავიდან ასაცილებლად გამოყენებული იქნა აშსა-ს კვაზიამონახსნების მეთოდი, რომელიც ითვალისწინებს დამატებით პირობებს, კერძოდ უკანა ნაწიბურზე სიჩქარეთა მითითებული მნიშვნელობების თანხვედრას.

შრომათა მესამე სერია უკავშირდება ოპტიმალური აეროდინამიკური პროექტირების ამოცანათა ამოხსნას. ოპტიმალური აეროდინამიკური პროექტირების ბრტყელი ამოცნების ამოხსნის ერთ-ერთი მიდგომა ემყარება ვარიაციული აშსა-ს თეორიას. დღესდღეობით ამ მიდგომით გამოკვლეულია მთელი რიგი ოპტიმიზაციის ამოცანებისა. ერთერთი მადგანია იუს-ის ბრტყელ პარალელურ ნაკადში უბან-უბან გლუვი შეუღწევადი კონტურის მქონე ისეთი პროფილის ფორმის პოვნა, რომელიც მოახდენდა ამწევი ძალის მაქსიმიზაციას, იმ შეზღუდვით რომ კონტურზე სიჩქარე იქნება მაქსიმალური [24], ხოლო ამ ამოცანის განზოგადოებულ სახეს წარმოადგენს ეკრანის თავზე პროფილის ოპტიმიზაციის ამოცანა [25]. უცნობი საზღვარი, მიზნის

ფუნქციონალის არაწრფივობა და შეზღუდვები მნიშვნელოვნად ართულებს გამოკვლევას და მოითხოვს რიცხვითი მეთოდების და გამოთვლითი ექსპერიმენტების აუცილებლობას. რიცხვითი ამოხსნა განხორციელდა ორი ხერხით: Matlab პროგრამული პაკეტით, საჯარიმო ფუნქციების მეთოდით და Fortran Power Station 40 პროგრამული პაკეტით კარუშა-კუნა-ტაკერის მეთოდის გამოყენებით. ჩატარებულია გამოთვლითი ექსპერიმენტები და აღნიშნული მეთოდებით მიღებული შედეგების შედარების შემდეგ აგებულია ოპტიმიზირებული ფორმის პროფილები [26].

ლ.გ. პლოტნიკოვი-ს [27] მიერ დასმულია და ამოხსნილია აეროდინამიკური მახასიათებლების ოპტიმიზაციის ამოცანა ფარის ტიპის ელერონების მქონე ფრთის პროფილისთვის. კერძოდ, ამოცანა ითვალისწინებს დახრილ, სწორხაზოვანი ფარიანი ფირფიტის ამწევი ძალის კოეფიციენტის მაქსიმიზაციას. მმართველ პარამეტრებად მიჩნეულია ფარის დახრის კუთხე და ფარის სიგრძის ფირფიტის სიგრძესთან შეფარდება. ამონახსნი მოიძებნება უპირობო ოპტიმიზაციის მეთოდით. შემდეგ იგება სიჩქარეთა განწილება ფარისა და ფირფიტის ზედაპირზე, რომლებიც მომავალში მოდიფიცირდება, კერძოდ, სიჩქარეთა უსასრულო და ნულოვანი მნიშვნელობები კუთხურ წერტილებში იცვლება სასრული სიდიდეებით. სიჩქარეთა ახალი განაწილების მიხედვით მოიძებნება ფრთის პროფილი ფარი-ფრთაუკანით აშსა-ს თეორიის საფუძველზე მოცემული პარამეტრების ოპტიმალური მიშვნელობებისთვის. აშსა-ს ამოხსნადობის პირობების დასაკმაყოფილებლად გამოიყენება კვაზიამოხსნათა მეთოდი. საწყის ეტაპზე აეროდინამიკის რთული პროფილების გამოკვლევისას მიზანშეწონილია აირჩეს დინების უმარტივესი მათემატიკური მოდელი და მარტივი ფრთის პროფილის ფორმა. სწორედ ასე მოიქცა მ. ა. ლავრენტიევი, როცა ამოხსნა ფრთის თეორიის ექსტრემალური ამოცანა, რომელშიც განიხილება რკალის ტიპის პროფილი იუს-ის მოდელის ჩარჩოებში. [28] შრომაში იუს-ით სტაციონალური გარსდინებისას კლასიკური მოდელების ჩარჩოებში გამოკვლეულია რკალის ტიპის პროფილის ამწევი ძალის მაქსიმიზაციის ამოცანა. პროფილზე

სადინარის არსებობისას, რომელიც ახდენს ნაკადის შერჩევის მოდელირებას. მოცემული რკალის ზედა ზედაპირზე ფიქსრებული დანახარჯის მქონე სადინარისთვის ნაპოვნია ოპტიმალური მდგომარეობა, რომელიც უზრუნველყოფს ამწევი ძალის მაქსიმალურად გაზრდას. ნაჩვენებია, რომ სადინარის არსებობისას შემოფარგლული სიმრუდისა და ქორდის სიგრძის მქონე რკალის ოპტიმალური ფორმა ემთხვევა სადინარის არმქონე ოპტიმალურ ფორმას, რომელიც იპოვა ლავრენტიევმა. განსაზღვრულია მაქსიმალური ამწევი ძალის შესაბამისი დანახარჯის სიდიდე და ამწევი ძალაზე ნაკადის შერჩევის გავლენის მექანიზმი.

ლეონტიევის მიერ [29] რიცხოვრივად გამოკვლეული იქნა ლავრენტიევის ამოცანა რკალისთვის ჰორიზონტალური ეკრანის მახლობლობაში. ამოცანა დაიყვანება მმართველი ფუნქციის ძიებაზე, რომელიც მიზნის ფუნქციონალს მიაწვდის ექსტრემუმს რკალის სიმრუდეზე შეზღუდვების არსებობისას. მმართველი ფუნქციის ხარისხოვანი მწკრივის ნაწილით მიახლოვების შედეგად, ამოცანა უსასრულოგანზომილებიანიდან დაიყვანება სასრულოგანზომილებიანზე, რომელიც იხსნება პირობითი ექსტრემუმის გრადიენტული მეთოდით მიახლოვებით. ისევე როგორც ლავრენტიევის შრომაში, მიღებულია რკალები მუდმივი სიმრუდით.

ფრთის პროფილების პროექტირებისას ერთერთ მთავარ პრობლემას წარმოადგენს ამწევი ძალის C_y კოეფიციენტის მაქსიმიზაცია. C_y მაქსიმალური სიდიდე მიიღწევა ისეთი წრის გარსდინებისას, რომლის ნაკადის განშტოებისა და ჩადინების წერტილები ერთმანეთს ემთხვევა. ამასთან $\left| \frac{V_{\max}}{V_x} \right| = 2 \cdot |V_{\max}|$ სიდიდეზე შეზღუდვა თავისთავად დადის აშსა-ზე ზედა საზღვარზე $|V| = |V_{\max}|$ მუდმივსიჩქარიანი უბნის მქონე პროფილისთვის. ჰიდროდინამიკური გისოსების როფილებისთვის ცნობილია ამგვარი ამოცანების ამოხსნა. ორი მუდმივ სიჩქარიანი უბნით $|V| = V_1$ და $|V| = V_2$ პროფილის ზედა და ქვედა საზღვრებზე. [30] და [31] ნაშრომებში განხილულია სიმეტრიული პროფილების აგების სამი ამოცანა კონტურზე სიჩქარის უბან-უბან მუდმივი განაწილებით. ასეთი "სამოდელო" პროფილების შესწავლა

საინტერესოა იმ თვალსაზრისით, რომ შესაძლებელია მათი კონტურის ცხადი ფორმულების საშუალებით აღწერა, რითაც შესაძლებელი ხდება აეროდინამიკის თვალსაზრისით ოპტიმალური ფორმის ადვილად მიღება.

ჩატარებულმა კვლევებმა, მაშინ როცა პროფილის ნაწიბურები წარმოადგენენ ნაკადის განშტოებისა და სიჩქარის წყვეტის წერტილებს, აჩვენეს, რომ ნაწიბურები ლოგარითმული სპირალის ხვეულებია. დამტკიცებულია, რომ განხილული კლასისთვის ამწევი ძალის მაქსიმალური კოეფიციენტი $C_y = 2e$, მაგრამ ამგვარად მიღებული პროფილები არ არის ერთფურცლიანი. ერთფურცლიანი პროფილების აგებისთვის მეორე შემთხვევაში ითვლებოდა, რომ სიჩქარის ნახტომის წერტილი მდებარეობს ზედა ზედაპირზე. ამასთან, მიღებულია ერთფურცლიანი ამონახსნები, რომლის ფიზიკური რეალიზება შეუძლებელია სიჩქარის ნახტომის წერტილის მიდამოში სპირალური ხვიის არსებობის გამო. ამიტომ განხილულია მესამე შემთხვევა, რომელშიც ხვიების მაგივრად გამოიყენება რგოლური არხი. ნაპოვნია განსაზღვრის არეები საწყისი პარამეტრებისთვის, აგებულია ერთფურცლიანი პროფილების მაგალითები და შესწავლილია მათი ხასიათი.

ზემოთ აღნიშნული მასალა ადასტურებს, რომ დღესდღეობით შემუშავებულია აშსა-ს სხვადასხვანაირი მეთოდები. მათ არსებით უპირატესობას წარმოადგენს ის, რომ ხშირ შემთხვევაში ამონახსნის ჩაწერა შესაძლებელია ცხადად ანალიტიკური ფორმით. თუმცა მოჩვენებითი სიმარტივის მიუხედავად რიცხვითი რეალიზაციისას წარმოიშობა მთელი რიგი პრობლემებისა, რომელთა ანალიზი მოყვანილია [32]-ში. ახალი პრობლემების პირველი კლასი დაკავშირებულია განსაკუთრებულობების გამოყოფასთან ანალიზური ამონახსნის საპოვნელად, ასევე ამოხსნის პირობების ისეთი ფორმით ჩამოყალიბებაში, რომელიც უფრო მიზანშეწონილია რიცხვითი რეალიზაციისათვის. [32] შრომაში აღწერილია რიცხვითი რეალიზაციის მეთოდები, რომელიც ეფუძნება მიღებულ ანალიტიკურ ფორმულებს, ხოლო ზემოთ აღნიშნული ფორმულები ილუსტრირებულია აშსა-ს სხვადასხვა ამოცანებზე. პრობლემათა მეორე ჯგუფი მნიშვნელოვანია იმ აშსა-სთვის, სადაც

გათვალისწინებულია გარსმდენი პროფილის ისეთი თვისებები, როგორცაა კუმშვადობა და სიბლანტე. ასეთ ამოცანებში ამოხსნადობის პირობების დასაკმაყოფილებლად აუცილებელია იტერაციული პროცედურების ორგანიზება.

და ბოლოს, პრობლემათა მესამე ჯგუფი უკავშირდება პროფილების ჰიდროდინამიკური გისოსისთვის ამოცანის ამოხსნის რიცხვითი რეალიზაციის თავისებურებებს. განსაკუთრებით მცირე ბიჯის გისოსებისა და ორგანოზომილებიანი გისოსების შემთხვევაში, რომლებიც მდებარეობენ დენის ღერძსიმეტრიულ ზედაპირზე. [32]-ში ნაჩვენებია ანალიტიკური მაგალითებისა და ამ სიმწელეთა გადალახვის რიცხვითი ხერხები.

ამგვარად, მოვახდინოთ აშსა-ს მიმართულებით ჩატარებული კვლევების შეჯამების ფორმულირება:

– დასმულია და ამოხსნილია აეროჰიდროდინამიკის სასაზღვრო ამოცანათა ციკლი, რომელიც მოიცავს შემდეგ ამოცანებს: იუს-ის ბრტყელ, პარალელურ, მოუწყვეტელ ნაკადში ფრთის პროფილების აგებასა და გათვლას, ასევე კუმშვადობის მიახლოებითი გათვალისწინებით, ბგერამდელი სიჩქარის ჩაპლიგინის გაზისთვის. ამოხსნილ ამოცანათა ციკლში ერთიანდება კვლევითი ობიექტი (ფრთათა პროფილები და ჰიდროდინამიკური გისოსები), შემუშავებული მეთოდები (პირდაპირი, შებრუნებული და შერეული სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის მეთოდები ანალიტიკური ფუნქციებისთვის) და მიზანი – პროფილთა აეროდინამიკური სრულყოფა, რომელიც მოიცავს მათ ოპტიმიზაციას სხვადასხვა პარამეტრების მიხედვით;

– ჰიდროდინამიკური ობიექტების რიცხვითი-ანალიტიკური პროექტირებისას აშსა-ს აპარატის უპირატესობა იმ მეთოდებთან შედარებით, რომლებშიც გამოყენებულია პირდაპირი ამოცანების მრავალჯერადი რიცხვითი ამოხსნა.

– გამოკვლეულია აშსა-თა სერია გარე ნაკადის მმართველი მოწყობილობის მქონე პროფილებისთვის და ოპტიმიზაციის ამოცანების ახალი ვარიაციული კლასი.

– ჩამოყალიბებულია ახალი მათემატიკური და აეროდინამიკური პრობლემები, რომლებიც მოითხოვს გადაწყვეტას.

– გაგრძელებულია მუშაობა აშსა-ს პრაქტიკული გამოყენების თვალსაზრისით. ყოველივე ზემოთქმულიდან ცხადია, რომ ფრთის პროფილის ოპტიმიზაციის ამოცანა ამოხსნილია იდეალური, ჩაპლიგინის გაზის შემთხვევაში. ხოლო რაც შეეხება ბლანტ სითხეს, აქ კვლავ რჩება რიგი ამოუხსნელი ვარიაციული ამოცანებისა, რასაც ეძღვნება წინამდებარე ნაშრომი.

თავი 2. ამოცანის დასმა

2.1. სითხეთა დინამიკის მათემატიკური მოდელები

2.1.1. ნიუტონის განზოგადოებული სითხეების დინამიკის მათემატიკური მოდელი

სითხისა და გაზის დინამიკის მათემატიკური მოდელირება იწყება ექსპერიმენტებით, მოცემული სითხის (გაზის ანუ აირის) რეოლოგიური კანონის დასადგენად [33].

ნიუტონური სითხეებისათვის გვაქვს ნიუტონის განზოგადოებული რეოლოგიური კანონი:

$$\sigma_{ij} = B_{ijmn} D_{mn} ; \quad (2.1.1)$$

სადაც, $D_{mn} = \dot{\varepsilon}_{mn}$ დეფორმაციის სიჩქარის ტენზორის კომპონენტებია. თუ სითხე ერთგვაროვანია, მაშინ B_{ijmn} - მუდმივი სიდიდეებისაგან შედგება, რომლებიც ახასიათებენ მოცემული სითხის ბლანტ თვისებებს. თუ, განვიხილავთ იზოტროპიულ ნიუტონურ სითხეს, მაშინ მუდმივათა მატრიცაში 81 კომპონენტიდან მხოლოდ ორია λ^* და μ^* დამოუკიდებელი.

შესაბამის რეოლოგიურ კანონს აქვს სახე:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* D_{kk}\delta_{ij} + 2\mu^* D_{ij} ; \quad (2.1.2)$$

სადაც, λ^* და μ^* - სითხის სიბლანტის დინამიური კოეფიციენტებია.

საშუალო ნორმალური ძაბვა იქნება:

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p + \frac{1}{3}(3\lambda^* + 2\mu^*)D_{ii} = -p + \chi^* D_{ii} ; \quad (2.1.3)$$

სადაც χ^* - სიბლანტის სივრცული კოეფიციენტია.

თუ, მივიღებთ სტოქსის პირობას და დავუშვებთ, რომ

$$\chi^* = 0, \quad (2.1.4)$$

მაშინ (4.176)-დან [33] მივიღებთ, რომ

$$\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -p, \quad (2.1.5)$$

ანუ, ჰიდროსტატიკური წნევა ბლანტ სითხეში, წონასწორობის პირობებში საშუალო ნორმალური ძაბვის ტოლია და მიმართულია სითხის შიგნით.

ამით აიხსნება სითხის წვეთის წონასწორობა სიბრტყეზე. ასეთ შემთხვევაში, თერმოდინამიკური წნევა – მთლიანად განისაზღვრება მექანიკური სიდიდეებით.

გარდა რეოლოგიური (2.1.2) კანონისა, მათემატიკური მოდელის ასაგებად იზოტროპიული ნიუტონური სითხეებისათვის, საჭიროა: მოძრაობის განტოლებები კოშის ფორმით, მასის შენახვის (უწყვეტობის) განტოლება, ენერგიის შენახვის კანონი და მდგომარეობის განტოლება.

მოძრაობის განტოლებას კოშის ფორმით აქვს სახე

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i ; \quad (2.1.6)$$

სადაც v_i - სითხის ნაწილაკების მოძრაობის სიჩქარის ვექტორის კომპონენტებია.

უწყვეტობის განტოლება ჩაიწერება ფორმით:

$$\rho + \rho v_{i,i} = 0 . \quad (2.1.7)$$

ენერგიის შენახვის კანონს აქვს ფორმა:

$$U = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} D_{ij} - \frac{1}{\rho} C_{i,i} + Z ; \quad (2.1.8)$$

სადაც, U – შინაგანი ენერგიაა, C_i - სითხური ნაკადის ვექტორის კომპონენტებია, რომელიც გადის სითხოვამტარობის ხარჯზე, დროის ერთეულში, ერთეულ ფართში, Z – ერთეულ დროში გამოსხივებული სითხოს მუდმივია, გაანგარიშებული მასის ერთეულზე.

მდგომარეობის განტოლება (ეესპერიმენტებიდან) ჩაიწერება ასე:

$$p = p(\rho, T) . \quad (2.1.9)$$

თუ, საჭიროა სითხური ეფექტების გათვალისწინებაც, რაც ხშირად გვხვდება პრაქტიკაში, მაშინ (2.1.2), (2.1.6) – (2.1.9) განტოლებათა სისტემას უნდა მივუერთოთ ფურიეს სითხოვამტარობის განტოლება და კალორიული განტოლება.

ფურიეს სითბოგამტარობის განტოლებას ჩაწერენ მოკლედ:

$$C_i = -kT_{,i}. \quad (2.1.10)$$

სადაც, k – სითბოგამტარობის კოეფიციენტი.

კალორიული განტოლება ჩაიწერება ექსპერიმენტებზე დაყრდნობით

$$U = U(\rho, T). \quad (2.1.11)$$

მიიღება 16 განტოლება 16 უცნობით, ანუ სისტემა არის ჩაკეტილი. ამ განტოლებათა სისტემას მიუერთებენ სასაზღვრო და საწყის პირობებს. ჰიდროდინამიკაში, ბლანტი სითხისათვის გამოიყენება სპეციფიკური სასაზღვრო პირობები, რომელთაც სითხის მიკვრის პირობებს უწოდებენ:

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.1.12)$$

2.1.2. ნავიე – სტოქს – დიუგემის განტოლება

განვიხილოთ ბლანტი სითხის მათემატიკური მოდელი იმ შემთხვევისათვის, როცა სითხური ეფექტები იმდენად უმნიშვნელოა, რომ შეიძლება უგულებელვყოთ.

თუ, კინემატიკურ თანადობებს:

$$D_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}); \quad (2.1.13)$$

შევიტანთ ნიუტონის (2.1.2) რეოლოგიურ განტოლებაში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \lambda^* \frac{1}{2}(v_{k,k} + v_{k,k}) + 2\mu^* \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \\ &= -p\delta_{ij} + \lambda^* v_{k,k} \delta_{ij} + \mu^* (v_{i,j} + v_{j,i}). \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

შემდეგ, (2.1.14) განტოლებას თუ შევიტანთ მოძრაობის (2.1.6) განტოლებაში, გვექნება:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \lambda^* v_{k,kj} \delta_{ij} + \mu^* (v_{i,jj} + v_{j,ji}) + \rho b_i. \quad (2.1.15)$$

ანუ, საბოლოოდ

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + (\lambda^* + \mu^*) v_{j,ji} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i; \quad (2.1.16)$$

(2.1.16) განტოლებას ნავიე – სტოქს – დიუგემის განტოლება ეწოდება ბლანტი სითხეებისათვის. თუ სითხე უკუმშია (როგორც წყალი), მაშინ

$$v_{i,i} = 0. \quad (2.1.17)$$

2.1.3. ნავიე – სტოქსის განტოლება უკუმში სითხეებისათვის

თუ განვიხილავთ უკუმში სითხეებს, მაშინ სითხის უკუმშვადობის (2.1.17) პირობის გათვალისწინებით (2.1.16)–დან მივიღებთ ნავიე – სტოქსის მათემატიკურ მოდელს:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} + \rho b_i; \quad (2.1.18)$$

$$v_{i,i} = 0; \quad (2.1.19)$$

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0; \quad (2.1.20)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}. \quad (2.1.21)$$

მიღებული (2.1.18) – (2.1.21) მათემატიკური მოდელი აღწერს ბლანტი, უკუმში სითხის მოძრაობას Ω - არეში, $\partial\Omega$ - საზღვრით.

2.1.4. ნავიე – სტოქსის განტოლება გაზებისათვის

თუ ნავიე – სტოქს – დიუგემის მოდელში, გავითვალისწინებთ სტოქსის პირობას

$$\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu^* \quad (2.1.22)$$

მაშინ, მივიღებთ ნავიე – სტოქსის განტოლებას გაზებისათვის:

$$\rho \dot{v}_i = -p_{,i} + \mu^* v_{i,jj} + \frac{1}{3}\mu^* v_{j,ji} + \rho b_i. \quad (2.1.23)$$

ამ განტოლებას უნდა მივუერთოთ მდგომარეობის (2.1.9) განტოლება, ენერგიის (2.1.8) განტოლება და უწყვეტობის (2.1.7) განტოლება (თუ არა გვაქვს სითხური ეფექტები).

2.1.5. განტოლებათა ჩაწერა უგანზომილებო სახით.

სიმარტივისათვის, განვიხილოთ ორგანზომილებიანი, ბლანტი, უკუმში სითხის დინება. შესაბამისი მათემატიკური მოდელი გადავწეროთ უგან-

ზომილებო სახით და დავადგინოთ მსგავსების კრიტერიუმები, დინებათა ფიზიკური მოდელების შესადგენად (ექსპერიმენტების ჩასატარებლად).

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = b_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\mu^*}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \right); \quad (2.1.24)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = b_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\mu^*}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \right); \quad (2.1.25)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \quad (2.1.26)$$

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0; \quad (2.1.27)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}. \quad (2.1.28)$$

თუ (2.1.24)-(2.1.28) განტოლებებში გადავალთ უგანზომილებო შტრიხიან ცვლადებზე ფორმულებით:

$$x_i = l_0 x'_i; \quad v_i = v_0 v'_i; \quad t = \frac{l_0}{v_0} t'; \quad p = \rho v_0^2 p'; \quad b_i = g b'_i. \quad (2.1.29)$$

მაშინ, მივიღებთ ამოცანას:

$$\frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial v'_1}{\partial t'} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_1 \frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_2 \frac{\partial v'_1}{\partial x'_2} = g b'_1 - \frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial p'}{\partial x'_1} + \frac{\mu^* v_0}{\rho l_0^2} \Delta v'_1; \quad (2.1.30)$$

$$\frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial v'_2}{\partial t'} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_1 \frac{\partial v'_2}{\partial x'_1} + \frac{v_0^2}{l_0^2} v'_2 \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} = g b'_2 - \frac{v_0^2}{l_0^2} \frac{\partial p'}{\partial x'_2} + \frac{\mu^* v_0}{\rho l_0^2} \Delta v'_2; \quad (2.1.31)$$

$$\frac{v_0}{l_0} \left(\frac{\partial v'_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial v'_2}{\partial x'_2} \right) = 0; \quad (2.1.32)$$

$$(v'_1)_{t=0} = v'_{10}; \quad (v'_2)_{t=0} = v'_{20}; \quad (2.1.33)$$

$$(v'_1)_{\partial\Omega} = 0; \quad (v'_2)_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.1.34)$$

თუ, (2.1.30)-(2.1.34) განტოლებებში შემოვიღებთ აღნიშვნებს

$$\text{Re} = \frac{v_0 l_0 \rho}{\mu^*}; \quad \text{Fr} = \frac{v_0}{\sqrt{g l_0}}; \quad (2.1.35)$$

და აღარ დავწერთ შტრიხებს, მივიღებთ მათემატიკურ მოდელს უგანზომილებო ფორმით:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{b_1}{\text{Fr}^2} - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v_1; \quad (2.1.36)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{b_2}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{Re} \Delta v_2 ; \quad (2.1.37)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0 ; \quad (2.1.38)$$

$$(v_1)_{t=0} = v_{10} ; (v_2)_{t=0} = v_{20} \quad (2.1.40)$$

$$(v_i)_{\partial\Omega} = 0 . \quad (2.1.41)$$

მუდმივ კოეფიციენტს Re – რეინოლდსის რიცხვი ეწოდება, ხოლო Fr – ფრუდის რიცხვია.

იმისათვის რომ, სხვადასხვა მასშტაბის ორი მოდელი იყოს ექვივალენტური, მათ შორის უნდა არსებობდეს მსგავსება. ცხადია, რომ ორი მოდელი მსგავსი იქნება, თუ მოდელის რეჟიმის განმსაზღვრელი მუდმივი კოეფიციენტები (Re და Fr), იქნებიან შესაბამისად ტოლები, ანუ, თუ

$$Re_1 = Re_2 ; Fr_1 = Fr_2 . \quad (2.1.42)$$

ამ პირობების ერთდროულად დაცვა კი ძალზედ რთულია, განსაკუთრებით იმ ამოცანებში, სადაც მნიშვნელობა აქვს სიმძიმის ძალის გავლენას.

მოდელების მათემატიკურად გამოსაკვლევად, მათ როგორც წესი, გადაწერენ უგანზომილებო ფორმით. გათვლების შედეგების პრაქტიკაში გადასატანად იყენებენ შესაბამისი გადასვლის ფორმულებს (2.1.29)

2.1.6. ეილერის მათემატიკური მოდელი იდეალური სითხეებისათვის.

განვიხილოთ ბლანტი, უკუმშვადი სითხის დინამიკა იმ შემთხვევაში, როცა რეინოლდსის რიცხვი იზრდება. ექსპერიმენტებით დადგენილია, რომ მოცემული ამოცანის პირობებში, არსებობს რეინოლდსის რიცხვის კრიტიული მნიშვნელობა, ისე რომ, თუ $Re \leq Re_{kr}$ გვაქვს ლამინარული (ფენოვანი) დინება, ხოლო, თუ $Re \geq Re_{kr}$ გვაქვს ფენების შერევა-დიფუზია, ამ რეჟიმს **ტურბულენტური დინება** ეწოდება.

თუ განვიხილავთ დინებას, რომლის დროსაც $Re \rightarrow \infty$, მივიღებთ ისეთ ტურბულენტურ დინებას, რომლის დროსაც განვითარებული დიფუზიის გამო, სიბლანტის თვისებას აღარ აქვს ფიზიკური გავლენა, ანუ დინება

შეიძლება განხილული იყოს, როგორც ისეთი სითხის დინება, რომლის ფენებს შორისაც არა გვაქვს ხახუნის ძალა (ასეთ სითხეებს იდეალურს უწოდებენ).

იდეალური სითხის დინამიკის მათემატიკური მოდელი შეიძლება მივიღოთ ბლანტი სითხის მოდელიდან, თუ მოვახდენთ შესაბამის ზღვარზე გადასვლას იმ პირობით, რომ $Re \rightarrow \infty$. მაშინ, (2.1.36)-(2.1.41) მათემატიკური მოდელი მიიღებს სახეს

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{b_1}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_1}; \quad (2.1.43)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{b_2}{Fr^2} - \frac{\partial p}{\partial x_2}; \quad (2.1.44)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0; \quad (2.1.45)$$

$$(v_i)_{t=0} = v_{i0}; \quad (2.1.46)$$

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial n}\right)_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.1.47)$$

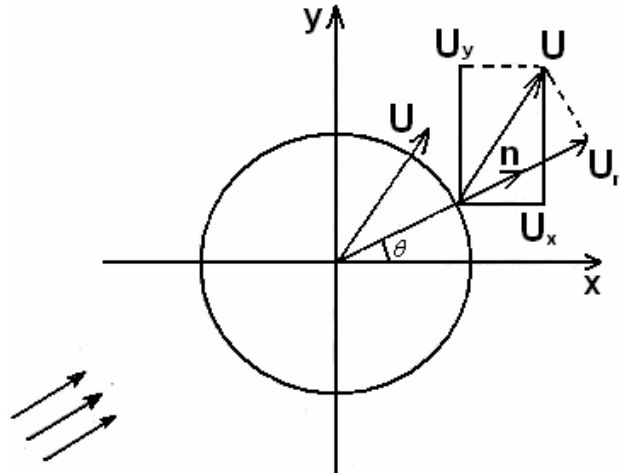
მათემატიკურ მოდელს, რომელიც მოიცემა (2.1.43)-(2.1.47) სახით ეილერის მოდელი ეწოდება.

2.2. იდეალური სითხის სტაციონალური ნაკადით პროფილების გარსდენის ამოცანები

2.2.1. წრიული ცილინდრის პოტენციალური გარსდენა იდეალური უკუმში სითხის ნაკადით გარსდენისას

დავუშვათ, R რადიუსის მქონე წრიული ცილინდრი მოძრაობს U სიქარით სითხის ნაკადში, რომელსაც აქვს უსასრულობაში მოცემული V სიჩქარე და ამავე დროს U და V სიჩქარეები ცილინდრის ღერძის პერპენდიკულარულია. (x, y) სიბრტყე ავიღოთ ცილინდრის მსახველის პერპენდიკულარულად. მივიღეთ წრის გარშემო სითხის დინების ბრტყელი ამოცანა, როდესაც იგი მოძრაობს $U(U_x, U_y, 0)$ სიჩქარით ნაკადში, რომელსაც უსასრუ-

ლობაში აქვს $V(V_x, V_y, 0)$ სიჩქარე. დავუშვათ, საწყისი მომენტში ცილინდრის ღერძი გადის კოორდინატთა სათავეში (ნახ. 2.1) [34].



ნახ. 2.1 წრიული ცილინდრის გარსდენის სქემა

ვინაიდან, მოძრაობა არის ბრტყელი და გრიგალის გარეშე, არსებობს კომპლექსური პოტენციალი $\omega(z)$ და კომპლექსური სიჩქარე $\bar{v}(z) = \frac{d\omega}{dz}$. განვიხილოთ კომპლექსური სიჩქარე. ფიზიკური მოსაზრებებიდან ნათელია, რომ $\bar{v}(z) = v_x - i v_y$ განსაზღვრული უნდა იყოს (x, y) სიბრტყის ყველა წერტილში R რადიუსის წრის გარეთ. იგი უნდა იყოს ყველაგან ცალსახა, შემოსაზღვრული და იღებდეს უსასრულობაში მოცემულ მნიშვნელობებს. კომპლექსური ცვლადის ასეთი ფუნქცია შეიძლება დაშლილი იქნას z დადებითი ხარისხის მქონე ლორენის მწკრივად:

$$\bar{v}(z) = c_0 + \frac{c}{z} + \frac{c'_1}{z^2} + \frac{c'_2}{z^3} + \dots \quad (2.2.1)$$

ამ მწკრივის პირველი წევრი ადვილად მოიძებნება უსასრულოდ დაშორებული წერტილის პირობიდან

$$\bar{v}(z)|_{\infty} = \bar{V} = V_x - i V_y.$$

მაშინ როცა $z = \infty$. (2.2.1)-დან გამომდინარეობს

$$V_x - i V_y = c_0. \quad (2.2.2)$$

(2.2.2)-ის (2.2.1)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$\frac{d\omega}{dz} = v(z) = V_x - iV_y + \frac{c}{z} + \frac{c_1'}{z^2} + \dots \quad (2.2.3)$$

ვანტეგრით მწკრივი z -ით, მივიღებთ კომპლექსურ პოტენციალს:

$$\omega(z) = (V_x - iV_y)z + c \ln z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}. \quad (2.2.4)$$

(2.2.4) კომპლექსური პოტენციალი უზრუნველყოფს ზღვრული პირობების შესრულებას $c, c_1, \dots, c_n, \dots$ მუდმივების ნებისმიერი მნიშვნელობებისას. ეს მუდმივები ისე უნდა განისაზღვროს, რომ შესრულებული იქნეს ცილინდრის გარსდენის პირობა:

$$v_n |_{s=U_n}. \quad (2.2.5)$$

ვინაიდან მოძრაობა პოტენციალურია $v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n}$. პოლარულ r, θ კოორდინატებში (2.2.5) პირობა $r = R$ ცილინდრის ზედაპირზე შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_{r=R} = U_x \cos \theta + U_y \sin \theta. \quad (2.2.6)$$

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ $\omega(z)$ ცვლადში შემავალი მუდმივები, მოსახერხებელია (2.2.4) გამოსახულებაში პოლარულ კოორდინატებზე გადასვლა, ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების ϕ და ψ -ის გამოყოფა და ϕ -ის r -ით გაწარმოების შემდეგ (2.2.6)-ში $\frac{d\phi}{dr}$ -ის ჩასმა. მიღებული ტოლობა გამოიყენება $c, c_1, \dots, c_n, \dots$ მუდმივების განსაზღვრისთვის. საძიებელი კოეფიციენტები იქნება კომპლექსური. დავუშვათ:

$$c = A + iB, \quad c_n = A_n + iB_n, \quad (2.2.7)$$

$$z = re^{i\theta}. \quad (2.2.8)$$

ჩავსვათ (2.2.7) და (2.2.8) (2.2.4)-ში, მივიღებთ

$$\begin{aligned} \omega(z) = \phi + i\psi = (V_x - iV_y)r(\cos \theta + i \sin \theta) + (A + iB)(\ln r + i\theta) + \\ + (A_1 + iB_1) \frac{1}{r^n} (\cos n\theta - i \sin n\theta). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

(2.2.9)-დან ადვილად შეიძლება φ და ψ -ისთვის გამოსახულების მიღება.

ამოვწეროთ გამოსახულება φ -სთვის და $\frac{d\varphi}{dr}$ -სთვის:

$$\varphi = (V_x r + \frac{A_1}{r}) \cos \theta + (V_y r + \frac{B_1}{r}) \sin \theta + a \ln r - B\theta + \sum_{n=2}^{\infty} (\frac{A_n}{r^n} \cos n\theta + \frac{B_n}{r^n} \sin n\theta), \quad (2.2.10)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = (V_x - \frac{A_1}{r^2}) \cos \theta + (V_y - \frac{B_1}{r^2}) \sin \theta + \frac{A}{r} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{r^{n+1}} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \quad (2.2.11)$$

დავუშვათ, $r = R$ (2.2.11)-ში ჩავსვათ $\frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R}$ გარსდენის (2.2.6) პირობაში.

მივიღებთ

$$\begin{aligned} (V_x - \frac{A_1}{R^2}) \cos \theta + (V_y - \frac{B_1}{R^2}) \sin \theta + \frac{A}{R} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{R^{n+1}} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = \\ = U_x \cos \theta + U_y \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

(2.2.12)-ის მარჯვენა მარცხენა ნაწილებში გვაქვს ფურიეს მწკრივები. შესაბამისი კოეფიციენტების შედარებით მივიღებთ

$$A = 0, \quad V_x - \frac{A_1}{R^2} = U_x, \quad V_y - \frac{B_1}{R^2} = U_y, \quad A_k = B_k = 0 \quad k=2, 3, \dots$$

საიდანაც,

$$A = 0, \quad A_1 = (V_x - U_x)R^2, \quad B_1 = (V_y - U_y)R^2, \quad A_k = B_k = 0. \quad (k = 2, 3, \dots) \quad (2.2.13)$$

B კოეფიციენტი აღმოჩნდა განუსაზღვრელი. ამისათვის შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$B = -\frac{\Gamma}{2\pi}. \quad (2.2.14)$$

(2.2.13)-ისა და (2.2.14)-ის (2.2.9)-ში ჩასმით, მივიღებთ გამოსახულებას კომპლექსური პოტენციალისთვის

$$\omega(z) = (V_x - iV_y)z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + \frac{(V_x - U_x)R^2 + i(V_y - U_y)R^2}{z}. \quad (2.2.15)$$

თუ შემოვიტანოთ აღნიშვნებს

$$V_x - iV_y = \bar{V}_\infty, \quad V_x + iV_y = V_\infty, \quad U_x + iU_y = U, \quad (2.2.16)$$

(2.2.15) ამონახსნი შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\omega(z) = \bar{V}_\infty z + (V_\infty - U) \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (2.2.17)$$

(2.2.17) წარმოადგენს წრიული ცილინდრის გარსდენის კომპლექსური პოტენციალის ზოგად სახეს. იგი წარმოადგენს სამი შესაკრების ჯამს, ერთი მათგანი $\bar{V}_\infty z$ გადატანითი ნაკადის კომპლექსური პოტენციალია, მეორე – დიპოლიდან დინების კომპლექსური პოტენციალი, მესამე – წერტილოვანი გრიგალის დინების პოტენციალი. ამრიგად, დინება ცილინდრის სიახლოვეს შეიძლება განვიხილოთ, როგორც დინება, რომელიც მიიღება შემხვედრი ნაკადის დიპოლიდან და ნაკადიდან ზედდებით. Γ მუდმივა, რომელიც გრიგალის ინტენსივობის აზრს განსაზღვრავს, ამონახსნში შედის როგორც პარამეტრი.

1. ვთქვათ, ხორციელდება უძრავი ცილინდრის გარსდენა. მაშინ $U = 0$ და

$$\omega_1(z) = \bar{V}_\infty z + V_\infty \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (2.2.18)$$

2. ვთქვათ, ცილინდრი მოძრაობს სითხეში, რომელიც უსასრულობაში უძრავია. მაშინ, $\bar{V}_\infty = V_\infty = 0$ და

$$\omega_2(z) = -U \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (2.2.19)$$

3. დავუშვათ, ცილინდრი უძრავია და ნაკადის სიჩქარე უსასრულობაში უდრის ნულს. თუ $U = 0$ და $\bar{V}_\infty = V_\infty = 0$, მაშინ

$$\omega_3(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (2.2.20)$$

მივიღეთ ცილინდრის ცირკულაციური გარსდენა.

უძრავი ცილინდრების გარსდენა. მოვახდინოთ წრიული ცილინდრის მახლობლობაში დინების სურათის ანალიზი. ვივარაუდოთ, რომ $U = 0$, ანუ ცილინდრი უძრავია და ნაკადი უსასრულობაში მიმართულია x ღერძის გასწვრივ. (x ღერძი ყოველთვის შეიძლება მივმართოთ სიჩქარის მიმართულეობით უსასრულობაში). როცა $V_x = V$, $V_y = 0$ კომპლექსური პოტენციალი (2.2.18) მიიღებს შემდეგ სახეს.

$$\omega(z) = V \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z. \quad (2.2.21)$$

განვიხილოთ ორი შემთხვევა;

ა) ცილინდრის უცირკულაციო გარსდენა $\Gamma = 0$ (ნახ. 2.2). ამ შემთხვევაში

$$\omega(z) = V \left(z + \frac{R^2}{z} \right),$$

ანუ

$$\varphi + i\psi = V \left(x + iy + R^2 \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right), \quad (2.2.22)$$

საიდანაც,

$$\varphi = Vx \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right), \quad \psi = Vy \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right), \quad (2.2.23)$$

დენის $\psi = const$ წირები, ანუ

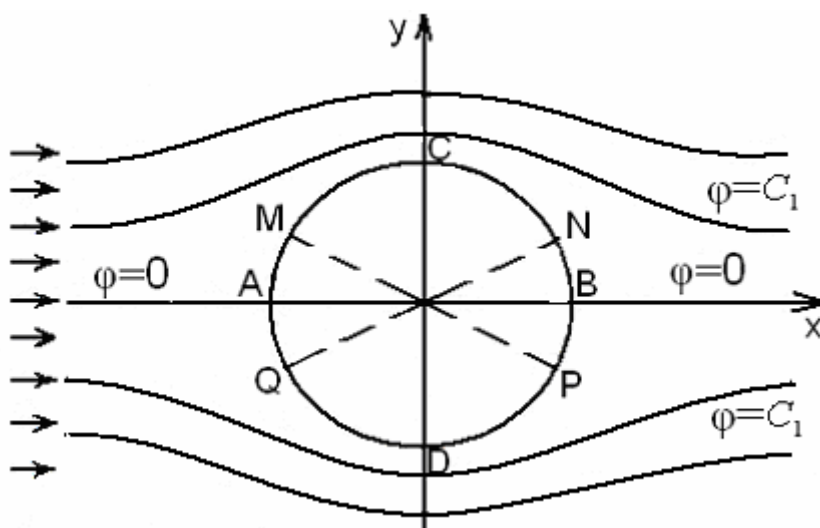
$$y \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) = const.$$

წარმოადგენენ Oy ღერძის მიმართ სიმეტრიულ მესამე რიგის მრუდებს.

წირები $\psi = C_1$ და $\psi = -C_1$ სიმეტრიულია Ox ღერძის მიმართ. როცა

$\psi = 0$ დენის წირის განტოლება იყოფა ორ მამრავლად: $y = 0 - Ox$ ღერძად და

$x^2 + y^2 = R^2$ - წრეწირად.



ნახ. 2.2 ცილინდრის უცირკულაციო გარსდენა $\Gamma = 0$

განვიხილოთ სიჩქარის ვექტორის ველი. გადავიდეთ პოლარულ კოორდინატებზე (r, θ) კოორდინატებზე. მივიღებთ

$$\begin{aligned}\varphi &= Vr \cos \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right), \\ v_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = V \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right), \\ v_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -V \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right).\end{aligned}\tag{2.2.24}$$

(2.2.24) ფორმულები იძლევიან სიჩქარის კომპონენტებს ნაკადის ნებისმიერ წერტილში. თუ (2.2.24)-ში დავუშვებთ, რომ $r = R$, მივიღებთ სიჩქარეს ცილინდრის ზედაპირზე

$$v_r = 0, \quad v_\theta = -2V \sin \theta.\tag{2.2.25}$$

ცილინდრის $\theta_A = \pi$ და $\theta_B = 0$ წერტილებში სიჩქარე უდრის ნულს, ანუ A და B კრიტიკული წერტილებია. $\theta_C = \frac{\pi}{2}$, $\theta_C = -\frac{\pi}{2}$ წერტილებში სიჩქარეს აქვს უდიდესი მნიშვნელობა, იგი ტოლია $2V$. თუ სიჩქარე ცნობილია, შეიძლება ბერნულის ინტეგრალიდან ვიპოვოთ წნევა.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C, \quad p = \rho(C - 2V^2 \sin^2 \theta).\tag{2.2.26}$$

როგორც (2.2.26)-დან ჩანს, ცილინდრის N, P, Q, M წერტილებში, $\pm \theta, \pm(\pi - \theta)$ კუთხეებით, წნევა ერთნაირია და ამიტომ ცილინდრზე მოქმედი ძალების მთავარი ვექტორი უდრის ნულს.

ბ) ცილინდრის გარსდენა ცირკულაციის მქონე ნაკადით. ამ შემთხვევაში $\omega(z)$ -ს აქვს (2.2.21)-ის სახე. კომპლექსური სიჩქარე

$$\bar{v}(z) = \frac{d\omega}{dz} = V\left(1 - \frac{R^2}{z^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z}.\tag{2.2.27}$$

ვიპოვოთ ნაკადის კრიტიკული წერტილები, რომლებშიც $v_x = v_y = 0$. გავუტოლოთ $\bar{v}(z) = v_x - iv_y$ ნულს მივიღებთ კვადრატულ განტოლებას, რომლის z_1 და z_2 ფესვები იძლევა კრიტიკული წერტილების კოორდინატებს.

$$Vz^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i}z - VR^2 = 0,$$

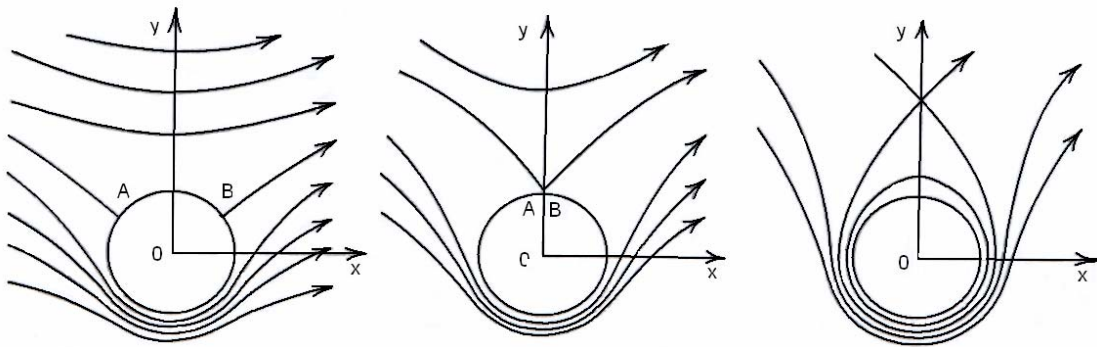
$$z_{1,2} = \frac{1}{2V} \left(-\frac{\Gamma}{2\pi i} \pm \sqrt{-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4V^2R^2} \right). \quad (2.2.28)$$

ამ შემთხვევაში განიხილება სხვადასხვა ვარიანტები;

1) $-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4V^2R^2 > 0$ – კრიტიკული წერტილები განლაგებულია გარსდენილ $|z_{1,2}| = R$ ცილინდრზე Oy ღერძის სიმეტრიულად, $\text{Im}z_1 = \text{Im}z_2$, $\text{Re}z_1 = -\text{Re}z_2$

2) $-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4V^2R^2 = 0$ – ორი კრიტიკული წერტილი შეერწყმის ერთმანეთს ერთ წერტილში, რომელიც განლაგებულია წარმოსახვით არხზე: $|z_{1,2}| = R$, $z_1 = z_2 = \frac{\Gamma}{4\pi V}i$

3) $-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4V^2R^2 < 0$ – განტოლების ორივე ფესვი წარმოსახვითია, ამავე დროს $|z_1| < R$, $|z_2| > R$. დინების არეში არსებობს ერთი კრიტიკული წერტილი ცილინდრის გარეთ წარმოსახვით ღერძზე.



ნახ.2.3 წრიული ცილინდრის გარსდენის სურათი სხვადასხვა შემთხვევაში

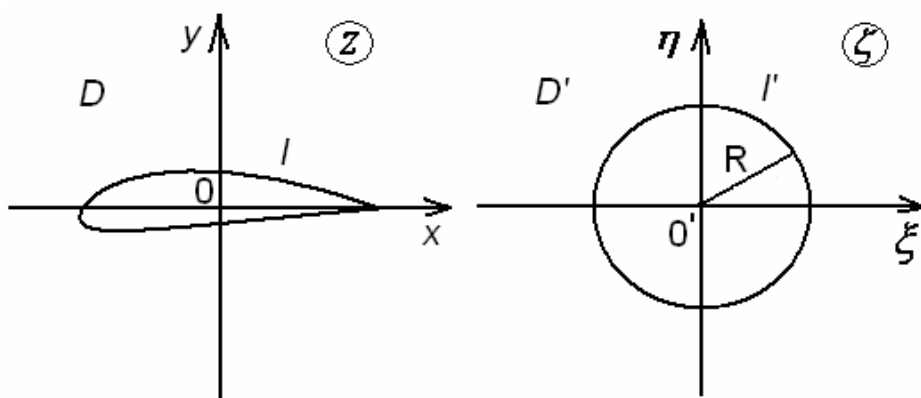
განხილულ შემთხვევაში, როდესაც ცილინდრის გარსდენა ხდება ცირკულაციით დენის წირები სიმეტრიულია Oy ღერძის მიმართ, წნევები სიდიდით თანაბარია. Ox ღერძის მიმართ დინება აღარ არის სიმეტრიული, ამიტომ წარმოიშვება ძალა, რომელიც მოქმედებს ცილინდრზე Oy ღერძის მიმართულადად. Ox ღერძის მიმართ მოქმედი ძალა, როგორც პირველ შემთხვევაში უდრის ნულს.

შედეგს, რომლის მიხედვითაც, იდეალური სითხით გარსდენილი სხეული არ განიცდის წინააღმდეგობას, ეწოდება დალამბერის პარადოქსი. თუ პირველ შემთხვევაში Γ -ს გავზრდით ისე, რომ $4V^2 R^2 \ll \frac{\Gamma^2}{4\pi^2}$, კრიტიკული წერტილი გააადგილდება წარმოსახვით ღერძზე და დაშორდება ცილინდრს. ზღვარში მივიღებთ წმინდა ცირკულაციურ დინებას.

შეიძლება დაისვას კითხვა: რომელი დინებაა სინამდვილეში. იდეალური სითხისთვის შეიძლება არსებობდეს სამივე შემთხვევა. ცილინდრის გარსდენის ამოცანის გადაწყვეტისას უნდა იყოს მოცემული ან ცირკულაცია, ან დამატებითი რაიმე პირობა (მაგალითად ნაკადის სიმეტრიულობა და სხვა). ის ფაქტი, რომ ამოცანის ამოხსნა შეიცავს ნებისმიერ Γ პარამეტრს, მრავალი პარკტიკული ამოცანის ამოხსნისას არსებით ფაქტს წარმოადგენს.

2.2.2. კონფორმული ასახვის მეთოდი

განვიხილოთ ნებისმიერი ფორმის კონტურის გარსდენის ამოცანის გადაწყვეტა (ნახ. 2.4). სიბრტყე, რომელშიც განლაგებულია l კონტური, განვიხილოთ $z = x + iy$ კომპლექსური ცვლადის სიბრტყედ. z სიბრტყესთან ერთად განვიხილოთ $\zeta = \xi + i\eta$ სიბრტყე და მასზე R რადიუსიანი წრე [34].



ნახ. 2.4 ნებისმიერი ფორმის კონტურის გარსდენის ამოცანის გადაწყვეტა

z სიბრტყის არე l კონტურის გარეთ, აღვნიშნოთ D -თი, ხოლო ζ სიბრტყის არე l' წრის გარეთ D' -ით.

კონფორმული ასახვის შესახებ რიშანის თეორემის მიხედვით, არსებობს ისეთი ანალიტიკური $z = f(\zeta)$ ფუნქცია, რომელიც გარდაქმნის D' არეს D არეში, ისე, რომ l' კონტურის წერტილები გადადიან l კონტურის წერტილებში და ნებისმიერი წინასწარ მოცემული წერტილი $A' \in D'$ გადადის მოცემულ $A \in D$ წერტილში. ეს ფუნქცია იქნება ერთადერთი, თუ A' წერტილში მოცემულია $\arg f'(\zeta_{A'}) = \varphi_0$. გამოვიყენოთ ეს თეორემა ავირჩიოთ A და A' წერტილებად z და ζ სიბრტყეების შორეული წერტილები და დავუშვათ, რომ ამავე დროს $\varphi_0 = 0$, რაც ნიშნავს, რომ ჩვენ ვიღებთ ისეთ $z = f(\zeta)$ ფუნქციას, რომელიც გარდაქმნის ζ სიბრტყის უსასრულოდ შორეულ წერტილს z სიბრტყის უსასრულოდ შორეულ წერტილში და არ ცვლის მიმართულებებს ამ წერტილში. ამ ფუნქციისთვის ζ სიბრტყის უსასრულო შორეულ წერტილში $\zeta = \infty$ წარმოებული არის $\frac{dz}{d\zeta} = k > 0$.

რიშანის თეორემის საფუძველზე არსებობს შებრუნებული გარდასახვა $\zeta = F(z)$. დავუშვათ, ცნობილია ფუნქციები

$$z = f(\zeta), \quad \zeta = F(z). \quad (2.2.29)$$

განვიხილოთ l კონტურის პოტენციალური ნაკადით გარსდენის ამოცანა. მოცემულია ნაკადის სიჩქარე უსასულოებაში:

$$v_\infty = v_{\infty x} + i v_{\infty y}.$$

ვთქვათ, $\omega(z)$ არის კომპლექსური პოტენციალი, რომელიც შეესაბამება ამ დინებას. $\omega(z)$ -ში შევცვალოთ z მისი (2.2.29) გამოსახულებით

$$\omega(z) = \omega[f(\zeta)] = W(\zeta). \quad (2.2.30)$$

ვინაიდან, $\omega(z)$ განსაზღვრულია D არის ყოველ წერტილში l კონტურის გარეთ, $W(\zeta)$ განსაზღვრულია D' ყოველ წერტილში l' კონტურის გარეთ. $W(\zeta)$ ანალიტიკური ფუნქცია შეიძლება განვიხილოთ ζ სიბრტყეში რაიმე დინების კომპლექსური პოტენციალი. z სიბრტყის ყოველ დინებას შეიძლება

შევუსაბამოთ დინება ζ სიბრტყეში, რომლის კომპლექსური პოტენციალი განისაზღვრება (2.2.30) ფორმულით. ვიპოვოთ ეს დინება. დავუშვათ,

$$\begin{aligned}\omega(z) &= \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \\ W(\zeta) &= \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta).\end{aligned}\quad (2.2.31)$$

z და ζ სიბრტყეების შესაბამის წერტილებში ადგილი აქვს (2.2.30) ტოლობას, ანუ

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta), \quad (2.2.32)$$

მაშასადამე, შესაბამის წერტილებში

$$\varphi(x, y) = \Phi(\xi, \eta), \quad \psi(x, y) = \Psi(\xi, \eta). \quad (2.2.33)$$

ფუნქცია $\omega(z)$ არის z სიბრტყეზე უძრავი l კონტურის გარსდენის კომპლექსური პოტენციალი. ამიტომ, დენის ფუნქცია $\psi(x, y)$ l კონტურზე მუდმივია. l -ს შეესაბამება l' წრეწირი ζ სიბრტყეზე. მაშასადამე, (2.2.33)-ს მიხედვით l' კონტურზე $\Psi(\xi, \eta)$ ფუნქციაც იქნება მუდმივი, ანუ წრეწირი არის დინების დენის წირი, რომლის კომპლექსური პოტენციალია $W(\zeta)$. გამოვიკვლიოთ ამ დინების პირობები უსასრულობაში. კომპლექსური სიჩქარე

$$\bar{V}(\zeta) = \frac{dW}{d\zeta} = \frac{d\omega}{dz} - \frac{dz}{d\zeta} = \bar{v}(z) \frac{dz}{d\zeta}. \quad (2.2.34)$$

z სიბრტყიდან უსასრულოდ დამორებულ წერტილში სიჩქარე ცნობილია.

(2.2.29) ფუნქციის აგებით წარმოებულ $\frac{dz}{d\zeta}$ უსასრულობაში დადებითია

$$\left(\frac{d\omega}{dz}\right)_{\infty} = \bar{v}_{\infty} = v_{\infty x} - i v_{\infty y}, \quad \left.\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\infty} = k > 0,$$

მაშასადამე,

$$\left(\frac{dW}{d\zeta}\right)_{\infty} = \bar{V}_{\infty} = k\bar{v}_{\infty}. \quad (2.2.35)$$

ამრიგად, $W(\zeta)$ განსაზღვრავს ζ სიბრტყეში დინებას წრის გარეთ, ამავე დროს ნაკადის სიჩქარე უსასრულობაში უდრის $k v_{\infty}$, მაგრამ წრიული ცილინდრის გარსდენის კომპლექსური პოტენციალი ცნობილია და აქვს სახე;

$$W(\zeta) = k\bar{v}_{\infty}\zeta + \frac{k v_{\infty} R^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta. \quad (2.2.36)$$

შევცვალოთ ζ (2.2.36)-ში $F(z)$ -ით., მივიღებთ

$$\omega(z) = k\bar{v}_\infty F(z) + \frac{k v_\infty R^2}{F(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln F(z). \quad (2.2.37)$$

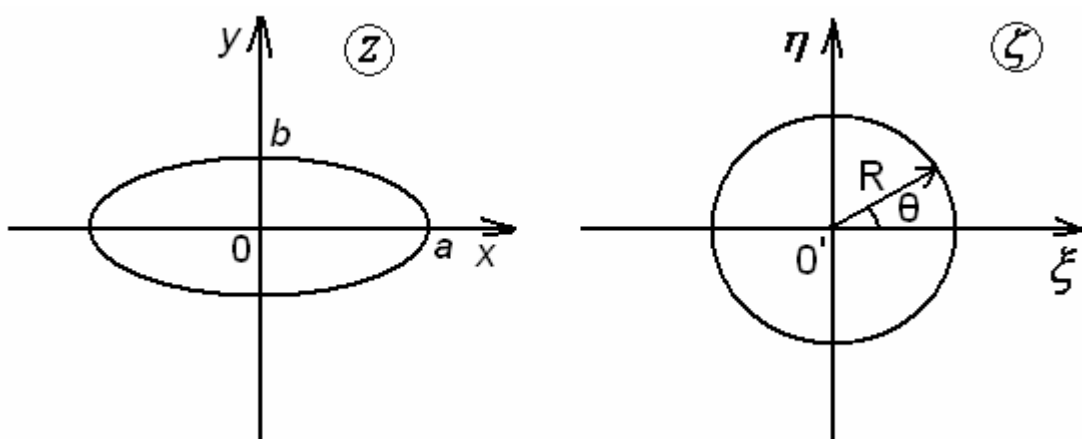
(2.2.37) ფორმულა ასახავს ნებისმიერი კონტურის პოტენციალური ნაკადით გარსდენის ამოცანის ამოხსნას, თუ ცნობილია კონფორმული ასახვა l კონტურის გარეთ წრის სახით, ანუ $\zeta = F(z)$ ფუნქცია. k -ს სიდიდე მოიძებნება ფორმულით

$$k = \frac{dz}{d\zeta} \Big|_\infty = \left(\frac{d\zeta}{dz} \Big|_\infty \right)^{-1} = [F'(z)_\infty]^{-1}.$$

(2.2.37)-ში Γ ცირკულაცია რჩება განუსაზღვრელი.

2.2.3. ელიფსური ცილინდრის გარსდენა

ვთქვათ, z სიბრტყეში გვაქვს a და b ნახევარღერძებიანი ელიფსი. ელიფსის v_∞ სიჩქარის ნაკადით გარსდენის ამოცანა ამოსახსნელად აუცილებელია $\omega(z)$ კომპლექსური პოტენციალის ცოდნა. ამისათვის უნდა ავაგოთ $\zeta = F(z)$ ფუნქცია, რომელიც გარდასახავს ელიფსის წრეზე. z სიბრტყესთან ერთად განვიხილოთ ζ სიბრტყე (ნახ. 2.5) [34].



ნახ. 2.5 ელიფსური ცილინდრის გარსდენის ამოცანა

შემოვიტანოთ უკოვსკის გარდაქმნები

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta}. \quad (2.2.38)$$

c მუდმივა ისე შევარჩიოთ, რომ (2.2.38) რომ იძლეოდეს R რადიუსიანი წრეწირის გარეთ ζ სიბრტყის არის ელიფსის გარეთ z სიბრტყეში გარდასახვას. წირზე

$$\zeta = Re^{i\theta} = R(\cos \theta - i \sin \theta). \quad (2.2.39)$$

(2.2.38)-ის (2.2.39)-ში ჩასმით და ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების გამოყოფით მიიღება

$$x = \left(R + \frac{c^2}{R} \right) \cos \theta, \quad y = \left(R - \frac{c^2}{R} \right) \sin \theta. \quad (2.2.40)$$

(2.2.40) განტოლება ელიფსის

$$a = R + \frac{c^2}{R}, \quad b = R - \frac{c^2}{R}. \quad (2.2.41)$$

ნახერდერძებიან პარამეტრულ განტოლებას წარმოადგენს.

(2.2.38) ფუნქცია მოგვცემს წირის გარდასახვას ელიფსზე მოცემული a და b ღერძებით, თუ ჩავთვლით, რომ

$$R = \frac{1}{2}(a + b), \quad c = \sqrt{\frac{1}{2}(a - b)R} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2}. \quad (2.2.42)$$

მაშინ (2.2.38) გამოსახულება შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$z = \zeta + \frac{1}{4} \frac{a^2 - b^2}{\zeta}. \quad (2.2.43)$$

მივიღებთ უკუგარდასახვას (2.2.43), ანუ $\zeta = F(z)$ (2.2.43)-ის თანახმად

$$\zeta^2 - \zeta z + \frac{1}{4}(a^2 - b^2) = 0, \quad \zeta = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}}{2}. \quad (2.2.44)$$

უკუგარდასახვა არაერთმნიშვნელოვანია. ავირჩიოთ ფესვის ისეთი შტო, რომ ელიფსი გარდაისახოს წრედ. ამისათვის (2.2.44)-ში უნდა ავიღოთ დადებითი ნიშანი. მართლაც, დიდი z -ისათვის ამ შემთხვევაში (2.2.44)-დან გვექნება

$$\zeta = z - \frac{1}{4} \frac{a^2 - b^2}{z} + \dots$$

მაშასადამე,

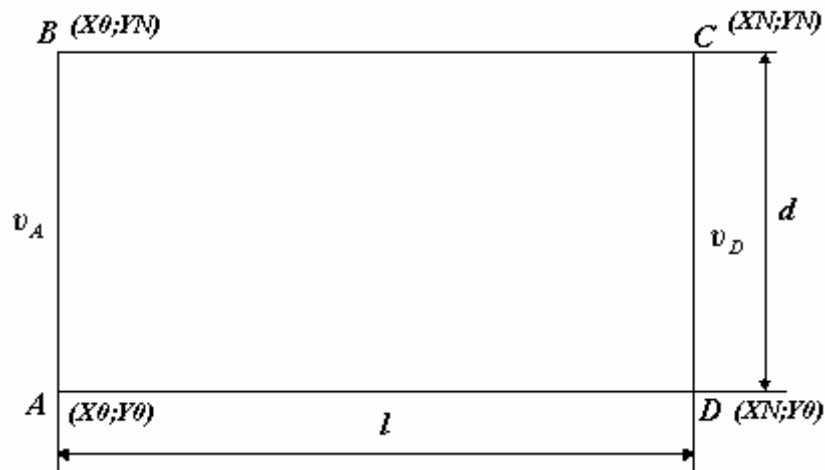
$$\zeta = F(z) = \frac{z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}}{2} \quad R = \frac{a+b}{2} \quad k=1 \quad (2.2.45)$$

ელიფსური ცილინდრის გარსდენის კომპლექსურ პოტენციალს ექნება სახე

$$\omega(z) = \frac{1}{2} v_\infty \left(z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right) + \frac{1}{2} v_\infty \frac{a+b}{a-b} \left(z - \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right) \quad (2.2.46)$$

2.3 ბერნულის განტოლება ბლანტი სითხეებისათვის ინტეგრალური ფორმით

სითხის ბრტყელ ნაკადში გამოვიყოთ მართკუთხედის ფორმის არე ABCD (ნახ. 2.6)



ნახ. 2.6. ბერნულის განტოლების საინტერპრეტაციო სქემა

AB კვეთში სიჩქარის საშუალო მნიშვნელობა და წნევა აღვნიშნოთ შესაბამისად v_A და p_A -ით; ხოლო CD კვეთში შესაბამისი მნიშვნელობები აღვნიშნოთ v_D და p_D -ით. მაშინ ბერნულის განტოლებას ექნება სახე [35]:

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{\alpha v_A^2}{2g} = \frac{p_D}{\rho g} + \frac{\alpha v_D^2}{2g} + h_f, \quad (2.3.1)$$

სადაც, $\alpha \approx 1.1$, ხოლო h_f – წნევის დანაკარგია სითხის სიბლანტის გამო და განისაზღვრება ვეისბახ-დარსის ფორმულით:

$$h_f = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v_{\text{საშ}}^2}{2g}; \quad v_{\text{საშ}} = \frac{v_A + v_D}{2}. \quad (2.3.2)$$

ტურბულენტური დინების შემთხვევაში ჰიდრავლიკური წინაღობის λ კოეფიციენტი განისაზღვრება ალმტულის ნახევრადემპირიული ფორმულით, რაც გვამღებს მნიშვნელობას [35]

$$\lambda \approx 0.11, \quad (2.3.3)$$

ხოლო

$$\begin{aligned} d &= YN - Y0, \\ l &= XN - X0. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

ამ თანადობების გათვალისწინებით მივიღებთ ბერნულის განტოლებას შემდეგი ფორმით:

$$\frac{p_A}{\rho g} + \frac{\alpha v_A^2}{2g} = \frac{p_D}{\rho g} + \frac{\alpha v_D^2}{2g} + 0.11 \cdot \frac{XN - X0}{YN - Y0} \cdot \frac{1}{2g} \left(\frac{v_A + v_D}{2} \right)^2. \quad (2.3.5)$$

გადავიდეთ (2.3.5) განტოლებაში უგანზომილებო სახეზე. ამისათვის ვისარგებლოთ შემდეგი ფორმულებით:

$$\frac{p_A}{\rho g d} = p'_A, \quad \frac{v_A^2}{2gd} = v_A'^2, \quad \frac{v_D^2}{2gd} = v_D'^2, \quad \frac{P_D}{\rho g d} = p'_D. \quad (2.3.6)$$

(2.3.5) განტოლებაში (2.3.6) ფორმულების ჩასმით მივიღებთ:

$$p'_A \cdot d + \alpha \cdot d v_A'^2 = p'_D \cdot d + \alpha \cdot d v_D'^2 + 0.11 \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{d \cdot v_A'^2 + d \cdot v_D'^2 + 2v'_A \cdot v'_D}{4}. \quad (2.3.7)$$

გამარტივების შედეგად მივიღებთ:

$$p'_A + \alpha \cdot v_A'^2 = p'_D + \alpha \cdot v_D'^2 + 0.11 \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v_A'^2 + v_D'^2 + 2v'_A \cdot v'_D}{4}. \quad (2.3.8)$$

სიმარტივისთვის თუ დავუშვებთ შემდეგ აღნიშვნებს $P'_A = p'_A$, $P'_D = p'_D$, $v'_A = v_A$, $v'_D = v_D$, მაშინ (2.3.8) შემდეგნაირად გადაიწერება:

$$p_A + \alpha \cdot v_A^2 = p_D + \alpha \cdot v_D^2 + 0.11 \cdot \frac{XN - N0}{YN - Y0} \cdot \frac{(v_A + v_D)^2}{4}, \quad (2.3.9)$$

რადგან v_A არის სიჩქარის სიდიდე კვეთში, თუ მივიღებთ, რომ

$$P_A \equiv P_1; \quad P_D \equiv P_2 \quad \text{და} \quad \nu_A(u_1, \nu_1); \quad \nu_D(u_2, \nu_2), \quad \text{ცხადია, რომ} \quad (2.3.9)$$

ტოლობა შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$p_1 + \alpha \cdot (u_1^2 + \nu_1^2) = p_2 + \alpha \cdot (u_2^2 + \nu_2^2) + 0.11 \cdot \frac{XN - N0}{YN - Y0} \cdot \frac{u_1^2 + \nu_1^2 + u_2^2 + \nu_2^2 + 2\sqrt{u_1^2 + \nu_1^2} \cdot \sqrt{u_2^2 + \nu_2^2}}{4}, \quad (2.3.10)$$

სადაც. $\alpha = 1.1$.

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ სტაციონალური ბრტყელი დინების შემთხვევაში $u_1(x, y); \nu_1(x, y); u_2(x, y); \nu_2(x, y); p_1(x, y); p_2(x, y)$ და რადგან ჩვენ უნდა დავაკმაყოფილოთ (2.3.10) განტოლება AB და CD კვეთის ნებისმიერი წერტილისთვის, გვექნება უსასრულო რაოდენობა განტოლებებისა, რომლებიც ერთიანად შეიძლება ჩავწეროთ ინტეგრალური განტოლებების სახით [36]:

$$E1 - E2 = E4, \quad (2.3.11)$$

სადაც,
$$E1 = \int_{Y0}^{YN} [p_1(x0, y) + 1.1 \cdot (u_1^2(x0, y) + \nu_1^2(x0, y))] dy, \quad (2.3.12)$$

$$E2 = \int_{Y0}^{YN} [p_1(xN, y) + 1.1 \cdot (u_1^2(x0, y) + \nu_1^2(x0, y))] dy, \quad (2.3.13)$$

$$E3 = 0.11 \cdot \frac{XN - XN}{YN - Y0} \cdot \int_{Y0}^{YN} \frac{u_1^2(X0, y) + \nu_1^2(X0, y) + u_2^2(XN, y) + \nu_2^2(XN, y)}{4} dy, \quad (2.3.14)$$

$$E4 = E3 + 0.11 \cdot \frac{XN - XN}{YN - Y0} \cdot \int_{Y0}^{YN} \frac{\sqrt{u_1^2(X0, y) + \nu_1^2(X0, y)} \cdot \sqrt{u_2^2(XN, y) + \nu_2^2(XN, y)}}{2} dy \quad (2.3.15)$$

2.4. მასის შენახვის კანონი. უწყვეტობის განტოლება

2.4.1. მასის შენახვის კანონი ინტეგრალური ფორმით.

განვიხილოთ t დროის მომენტში სითხის გარკვეული τ მოცულობა შემოსაზღვრული S ზედაპირით. აღვნიშნოთ ამ მოცულობის სითხის მასა M -ით. სითხის ნაწილაკები, რომლებიც t მომენტში იმყოფებიან τ მოცულობაში, t' მომენტში გადაადგილებისას τ' მოცულობას შევსებენ M' მასით.

დავუშვათ, რომ სითხის მოძრაობისას ადგილი არ აქვს სითხის არც დაკარგვასა და არც წარმოშობას. მაშინ მასის შენახვის კანონი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$M = M' \quad (2.4.1)$$

სიმკვრივის განმარტებიდან $d\tau$ მოცულობის მასა უდრის $dm = \rho d\tau$. შესაბამისად τ და τ' მოცულობებში მასა იქნება:

$$M = \int_{\tau} \rho d\tau, \quad M' = \int_{\tau'} \rho' d\tau, \quad (2.4.2)$$

მასის შენახვის კანონი მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\int_{\tau} \rho d\tau = \int_{\tau'} \rho' d\tau, \quad (2.4.3)$$

ანუ

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau = 0 \quad (2.4.4)$$

დავუშვათ, რომ მოძრავი სითხით შევსებულ სივრცეში არსებობს სივრცულ-განაწილებიანი წყაროები. ვთქვათ, $d\tau$ მოცულობაში dt დროის ინტერვალში ამ წყაროებიდან შემოდის $dm = q d\tau dt$ სითხის მასა. სადაც, q არის წყაროებიდან შემოსული სითხის მასის შეფარდება მოცულობის და დროის ერთეულთან. ამიტომ q სიდიდეს შეიძლება ვუწოდოთ წყაროების სიმკვრივე. t მომენტში τ მოცულობაში მყოფი სითხის მასა მოძრაობისას იცვლება. dt დროის შემდეგ იგი მიიღებს ნაზრდს: $\Delta m = dt \int_{\tau} q d\tau$, დროის სასრულ ინტერვალში t -დან t' -მდე მასის ნაზრდი იქნება

$$\Delta M = \int_t^{t'} \left(\int_{\tau} q d\tau \right) dt. \quad (2.4.5)$$

შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$M' = M + \Delta M. \quad (2.4.6)$$

(2.4.2)-ისა და (2.4.5)-ის (2.4.6)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$\int_{\tau} \rho d\tau + \int_t^{t'} \left(\int_{\tau} q d\tau \right) dt = \int_{\tau'} \rho' d\tau. \quad (2.4.7)$$

(2.4.7) წარმოადგენს მასის შენახვის კანონს ჩაწერილ სივრცულ-განაწილებიან წყაროების არსებობისას სასრულ მოცულობაში და სასრული დროის ინტერვალში.

მოვახდინოთ (2.4.7)-ის ჩაწერა ინტეგრალური ფორმით დროის უსასრულო მცირე ინტერვალისათვის. დავუშვათ, $t' = t + \Delta t$, მაშინ (2.4.7) შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\iiint_{\tau'} \rho' d\tau - \iiint_{\tau} \rho d\tau = \Delta t \iiint_{\tau} q d\tau. \quad (2.4.8)$$

გავყოთ (2.4.8) Δt -ზე და ვიპოვოთ ზღვარი, როცა $\Delta t \rightarrow 0$, მივიღებთ

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = \iiint_{\tau} q d\tau. \quad (2.4.9)$$

ტოლობა (2.4.9) წარმოადგენს მასის შენახვის კანონს დროის მოცემულ მომენტში სასრული მოცულობისთვის, სივრცულ-განაწილებული წყაროების არსებობისას.

2.4.2. მასის შენახვის კანონი დიფერენციალური ფორმით, ეილერის ცვლადებით. (უწყვეტობის განტოლება ეილერის ცვლადებით)

დიფერენცირებისათვის გამოვიყენოთ ფორმულა

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\tau} A d\tau = \iiint_{\tau} \left[\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (A v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (A v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (A v_z) \right] d\tau. \quad (2.4.10)$$

სადაც, A შევცვალოთ ρ -თი:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\tau} \rho d\tau = \iiint_{\tau} \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) \right] d\tau. \quad (2.4.11)$$

(2.4.11)-ის (2.4.9)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$\iiint_{\tau} \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) - q \right] d\tau = 0. \quad (2.4.12)$$

(2.4.12) ტოლობას ადგილი აქვს ნებისმიერი τ მოცულობითთვის, რაც შესაძლებელია იმ შემთხვევაში, როცა ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ნულის ტოლია. ამრიგად, (2.4.12)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = q. \quad (2.4.13)$$

(2.4.13)-ის გახსნითა და იდივიდუალური წარმოებულის $\frac{d\rho}{dt}$ აღნიშვნით მივიღებთ

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = q. \quad (2.4.13')$$

(2.4.13) ტოლობა წარმოადგენს მასის შენახვის კანონის დიფერენციალურ ფორმას ეილერის ცვლადებში სივრცულ-განაწილებიანი წყაროების არსებობისას q სიმკვრივით.

დავუშვათ, სითხე უკუმშია, რაც იმას ნიშნავს, რომ მოძრავ ნაწილაკში სიმკვრივე არ იცვლება, ანუ ინდივიდუალური წარმოებული $\frac{d\rho}{dt}$ უდრის ნულს. უწყვეტობის განტოლება (2.4.13) უკუმში სითხეებისთვის ამ შემთხვევაში შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{q}{\rho} \quad \text{ანუ} \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{q}{\rho}. \quad (2.4.14)$$

განვიხილოთ უწყვეტობის განტოლება იმ შემთხვევისთვის, როცა $q = 0$. უწყვეტობის (2.4.13) განტოლება ზოგადი სახით შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \quad (2.4.15)$$

შემოვიტანოთ $\rho \mathbf{v}$ ვექტორი ρv_x , ρv_y და ρv_z პროექციებით. მაშინ (2.4.15) შემდეგი სახით ჩაიწერება

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.4.15')$$

(2.4.13')-დან მიიღება ყველაზე უფრო გავრცელებული ფორმა

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.4.16)$$

განვიხილოთ უწყვეტობის განტოლება კერძო შემთხვევისთვის.

1. **დამყარებული მოძრაობა.** ამ შემთხვევაში კერძო წარმოებული უნდა უდრიდეს ნულს, ანუ $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. დამყარებული მოძრაობისთვის უწყვეტობის განტოლება იქნება

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0, \text{ ანუ } \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.4.17)$$

2. სითხე უკუმშია. ამ შემთხვევაში $\frac{d\rho}{dt} = 0$. (2.4.16)-დან გამომდინარეობს

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.4.18)$$

3. ბრტყელი მოძრაობა. მოძრაობას ეწოდება ბრტყელი, თუ არსებობს ისეთი სიბრტყე, რომ სითხის ყველა ნაწილი მოძრაობს ამ სითხის პარალელურად, ამავე დროს, ამ სიბრტყის ყოველ პერპენდიკულარულ წრფეზე ჰიდროდინამიკურ სიდიდეებს ტოლი მნიშვნელობები აქვთ. ჩავთვალოთ ეს სიბრტყე (x, y) სიბრტყედ, მივიღებთ, რომ $v_z \equiv 0$, ხოლო ყველა ჰიდროდინამიკური სიდიდეები დამოკიდებული იქნება მხოლოდ x, y, t -ზე და შესაბამისად, z -ით წარმოებულები ნულის ტოლი იქნება

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0$$

ამავე დროს, თუ მოძრაობა დამყარებულია, მაშინ

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0$$

უკუმში სითხეებისთვის $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

2.5 ამოცანის დასმა პროფილის ოპტიმალური ფორმის საპოვნელად ბლანტ, უკუმში სითხეში

თვითმფინავის ფრთის ოპტიმალური ფორმის საპოვნელად ირჩევენ მიზნის ფუნქციას (ფუნქციონალს). ჩვენს შემთხვევაში ეს არის ამწევი ძალის

C_y კოეფიციენტი ან ფრთის აეროდინამიკური ხარისხი $K = \frac{C_y}{C_x}$, სადაც

C_x – ფრთის პროფილის წინაღობის კოეფიციენტი.

თითოეული ამ კოეფიციენტებიდან წარმოადგენს ფუნქციონალს, რომელიც დამოკიდებულია, როგორც პროფილის გასწვრივ წნევების განაწილებაზე, ასევე გარსმდენი სითხის სიჩქარეთა ველის განაწილებაზე. ამასთან, ველებთ პროფილის ქვედა საზღვარს. ე.ი. გვაქვს ამოცანა უცნობი საზღვრით.

ცნობილია, რომ

$$C_y = \int_0^1 (P_{ქვედა}(x) - P_{ზედა}(x)) dx \quad (2.5.1)$$

$$C_x = \int_{L_{მარცხენა}} P(L) dL - \int_{L_{მარჯვენა}} P(L) dL \quad (2.5.2)$$

სადაც, $P_{ქვედა}(x)$ – წნევების განაწილება პროფილს უცნობი ქვედა საზღვრის გასწვრივ, $P_{ზედა}(x)$ – განაწილება პროფილის ცნობილი ზედა საზღვრის გასწვრივ. $L_{მარცხენა}$ – უცნობი პროფილის მაქსიმალური სისქის წერტილში ვერტიკალური კვეთის მარცნივ მდებარე პროფილის ნაწილია, $L_{მარჯვენა}$ – მარჯვნივ მდებარე ნაწილი.

ცხადია, გვაქვს შეზღუდვებიც. ესენია:

- 1) ბლანტი სითხის პროფილზე მიკვრის პირობები:

$$\vec{V}(u, v)|_L = 0 \quad (2.5.3)$$

სადაც, L – ფრთის პროფილის კონტურია;

- 2) L – კონტურის უწყვეტობა კიდურა წერტილებში:

$$L_{ქვედა}|_{x=0} = L_{ზედა}|_{x=0} = 0, \quad (2.5.4)$$

$$L_{ქვედა}|_{x=1} = L_{ზედა}|_{x=1} = 0 \quad (2.5.5)$$

ამასთან, მოვითხოვთ, რომ კონტურის უცნობი ქვედა საზღვარი $L_{ქვედა}$ იყოს ანალიზური ფუნქცია;

- 3) კინემატიკური პირობები:

3.1) შემხვედრი ნაკადის პროფილი $IGR1$ უნდა იყოს: პარაბოლური ან მუდმივი $L_2(G)$ –ს აზრით

$$IGR1(\alpha, \beta) = \int_{Y_0}^{Y_N} [u(X_0, y, \alpha) - (1 - y^2)]^2 dy + \int_{Y_0}^{Y_N} v^2(X_0, y, \beta) dy \rightarrow \min. \quad (2.5.6)$$

3.2) დადებითი ნაკადის უზრუნველყოფის პირობები

$$\int_{Y_0}^{Y_N} u(X_0, y, \alpha) dy \geq 0 \quad (2.5.7)$$

3.3) წნევათა ველის წარმოების პირობები:

$$p(0, 0, \gamma) = 1 \quad (2.5.8)$$

4) მასის შენახვის კანონი

$$\int_{Y_0}^{Y_N} u(X_0, y, \alpha) dy = \int_{Y_0}^{Y_N} u(X_N, y, \alpha) dy + \int_{X_0}^{X_N} (v(x, Y_0, \beta) + v(x, Y_N, \beta)) dx. \quad (2.5.9)$$

5) ბერნულის განტოლება ბლანტი სითხეებისათვის, რომლის თანახმადაც ფრთის პროფილის საწყის და საბოლოო კვეთებში ენერგიათა სხვაობა ტოლია პროფილის ზედაპირის გასწვრივ ხახუნზე დახარჯული ენერგიისა:

$$E1(\alpha, \beta, \gamma) - E2(\alpha, \beta, \gamma) = E4(\alpha, \beta, \gamma) \quad (2.5.10)$$

სადაც

$$E1(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{Y_0}^{Y_N} [p(X_0, y, \gamma) + 1.1(u^2(X_0, y, \alpha) + v^2(X_0, y, \beta))] dy. \quad (2.5.11)$$

$$E2(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{Y_0}^{Y_N} [p(X_N, y, \gamma) + 1.1(u^2(X_N, y, \alpha) + v^2(X_N, y, \beta))] dy \quad (2.5.12)$$

$$E3(\alpha, \beta, \gamma) = 0.11 \cdot \frac{X_N - X_0}{Y_N - Y_0} \int_{Y_0}^{Y_N} \frac{u^2(X_N, y, \alpha) + v^2(X_N, y, \beta) + u^2(X_0, y, \alpha) + v^2(X_0, y, \beta)}{4} dy \quad (2.5.13)$$

$$E4(\alpha, \beta, \gamma) = E3(\alpha, \beta, \gamma) +$$

$$+ 0.11 \cdot \frac{X_N - X_0}{Y_N - Y_0} \cdot \int_{Y_0}^{Y_N} \frac{\sqrt{(u^2(X_0, y, \alpha) + v^2(X_0, y, \beta))(u^2(X_N, y, \alpha) + v^2(X_N, y, \beta))}}{2} dy \quad (2.5.14)$$

ამ ჩანაწერებში α, β, γ დამხმარე პარამეტრებშია, რომელთა შინაარსიც შემდგომში გახდება ცხადი.

როგორც ვხედავთ, გვაქვს არაწრფივი, ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანა უცნობი საზღვრით.

ამ ამოცანის ამოსახსნელად, ვისარგებლებთ სიჩქარეთა ვექტორის კომპონენტებისა და წნევათა ველის პოლინომიალური წარმოდგენით:

$$u(x, y, \alpha) = \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \alpha_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n \quad (2.5.15)$$

$$v(x, y, \beta) = \sum_{m=0}^{k_1} \sum_{n=0}^{k_1} \beta_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n \quad (2.5.16)$$

$$p(x, y, \gamma) = \sum_{m=0}^{k_1} \sum_{n=0}^{k_1} \gamma_{m,n} \cdot x^m \cdot y^n; \quad (2.5.17)$$

ამ წარმოდგენაში α, β, γ უცნობი კოეფიციენტების მატრიცებია. ეს წარმოდგენა შესაძლებელია, რადგან $L_2(G)$ სეპარაბელური სივრცეა და პოლინომების სიმრავლე ყველგან მკვრივია ჰილბერტის $L_2(G)$ სივრცეში.

სადაც

$$G = [X0, XN] \times [Y0, YN] \quad (2.5.18)$$

უცნობი ქვედა საზღვარი ვეძებთ ისეთი მრავალწევრების სიმრავლეში, რომელთაც აქვთ სახე:

$$y(x) = (x-1)(ax^2 + bx) \quad (2.5.19)$$

ამ შემთხვევაში $y(0) = y(1) = 0$, ე.ი. საზღვარზე მოთხოვნილი პირობები დაცულია. ამასთან ქვედა საზღვრის პოვნა ნიშნავს a და b პოვნას.

მაშინ, ჩვენი საძებნი C_y ან K ფუნქციონალი გადაიქცევა მრავალი ცვლადის ფუნქციად (რადგან საძებნია უკვე არა u, v, p ფუნქციები, არამედ მუდმივი $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ კოეფიციენტები)

მაშასადამე, გვაქვს უკვე მრავალი ცვლადის C_y ან K ფუნქციები, რომელთა მაქსიმალიზაციის პირობებიდან უნდა განვსაზღვროთ $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ მუდმივობის მნიშვნელობები შეზღუდვების გათვალისწინებით.

ამოცანის ამოხსნის მიზნით მოვახდინოთ მიზნის ფუნქციის ინტეგრალის ჯამით შეცვლა. კვანძის წერტილებად ავიღოთ ცნობილი ზედა საზღვრის კვანძების X_s წერტილები, მაშინ ამწევი ძალის კოეფიციენტის საპოვნელად გვექნება გამოსახულება:

$$C_y(a, b, \gamma) = \sum_{s=0}^q [p[x_s, (x_s - 1)[a \cdot x_s^2 + b \cdot x_s], \gamma] - p(x_s, y_s, \gamma)] \rightarrow \max \quad (2.5.20)$$

ასევე შევეცადოთ გავაერთიანოთ მიკვრის პირობები და შემხვედრი ნაკადის ეპიურის კინემატიკური პირობები ერთ, მრავალი ცვლადის ფუნქციაში:

$$I(\alpha, \beta, a, b) = IGR1(\alpha, \beta) + RZEDA(\alpha, \beta) + RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) \quad (2.5.21)$$

სადაც

$$IGR1(\alpha, \beta) = \int_{Y_0}^{YN} u(X_0, y, \alpha) - 1)^2 dy + \int_{Y_0}^{YN} v^2(X_0, y, \beta) dy \rightarrow \min; \quad (2.5.22)$$

$$RZEDA(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{s=0}^q (u^2(x_s, y_s, \alpha) + v^2(x_s, y_s, \beta)) \rightarrow \min; \quad (2.5.23)$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) = \sum_{s=0}^q u^2[x_s, (x_s - 1) \cdot [a \cdot x_s^2 + b \cdot x_s] \alpha] + \\ + \sum_{s=0}^q v^2[x_s, (x_s - 1) \cdot [a \cdot x_s^2 + b \cdot x_s] \beta] \rightarrow \min \quad (2.5.24)$$

როგორც ვხედავთ გვაქვს გვაქვს ვექტორული ოპტიმიზაციის ამოცანა [47-49]. ცხადია, რომ $IGR1 \geq 0$, $RZEDA \geq 0$, $RKVEDA \geq 0$, ამიტომ ამ ფუნქციათა ჯამის მინიმუმის ამოცანით შეგვიძლია შევცვალოთ ეს სამი პირობა, ანუ

$$I(\alpha, \beta, a, b) \rightarrow \min. \quad (2.5.25)$$

ამოცანა ექვივალენტურია ამ სამი არაუარყოფითი ფუნქციის მინიმუმის პოვნის ამოცანისა.

მაგრამ ჩვენ გვაქვს ამწევი ძალის C_y კოეფიციენტის ფუნქციაზე პირობა:

$$C_y(a, b, \gamma) \rightarrow \max \quad (2.5.26)$$

ამ ბოლო ორი პირობის გასაერთიანებლად, ვისარგებლოთ იმით, რომ $C_y(a, b, \gamma) > 0$ და მისი მაქსიმუმის წერტილი დაემთხვევა $\frac{1}{C_y^2(a, b, \gamma)}$ ფუნქციის მინიმუმის წერტილს.

მაშასადამე, ეს ორი პირობა შეგვიძლია გავაერთიანოთ ერთ პირობაში:

$$I(\alpha, \beta, \gamma, a, b) + C_y^{-2}(a, b, \gamma) \rightarrow \min \quad (2.5.27)$$

სადაც დაგვრჩა შეზღუდვები:

მასის შენახვის კანონი (2.5.9)

ბერნულის განტოლება (2.5.10)-(2.5.14)

და კინემატური პირობები (2.5.7)-(2.5.8)

ამრიგად, მივიღეთ თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ოპტიმიზაციის ამოცანის დასმა (2.5.27), (2.5.9), (2.5.10)-(2.5.14), (2.5.7)-(2.5.8) .

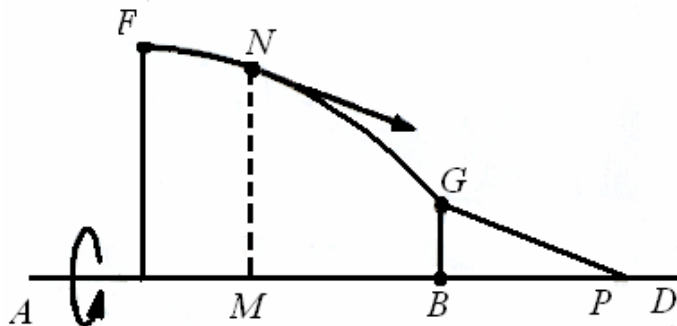
ამ ამოცანის ამოხსნას ვაწარმოებთ Mathcad 2001-ის ბაზაზე. ამოხსნის შედეგად ვიღებთ ქვედა საზღვრის უცნობ a, b კოეფიციენტებს და (2.5.15)-(2.5.17) გამლის α, β, γ კოეფიციენტებს. რაც საშუალებას გვაძლევს გავთვალთ სიჩქარეთა ველისა და წნევის განაწილება პროფილის გასწვრივ.

თავი 3. პროფილის ოპტიმალური გარსდენადი ფორმის დადგენის ვარიაციული ამოცანის ამოხსნა

3. 1. ნიუტონის მათემატიკური მოდელი და პროფილის ოპტიმალური ფორმის დადგენა

1687 წელს მსოფლიოში გამოქვეყნდა ისააკ ნიუტონის ნაშრომი "ნატურალური ფილოსოფიის მათემატიკური საწყისები". იგი იკვლევდა ბრუნვის სხეულის იდეალურ აირში მოძრაობისა და მისი განმსაზღვრელი განტოლების პოვნის საკითხს, რომლის დროსაც სხეულის წინააღმდეგობის ძალა იქნებოდა მინიმალური [37].

ნიუტონის ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: "თუ FNG მრუდი ისეთია, რომ მისი ნებისმიერი N წერტილიდან AD ღერძზე რომ დაეშვათ NM პერპენდიკულარი და "კიდურა" G წერტილიდან გავავლოთ N მხების GP მართობი, მაშინ გვექნება შემდეგი პროპორცია $MN : GP = GP^3 : (4BP \cdot GB^2)$ ". (ნახ.3.1)



ნახ. 3.1 ნიუტონის მრუდი

ასე, რომ მართებულია ფორმულა:

$$\frac{MN}{GP} = \frac{GP^3}{4BP \cdot GB^2} \quad (3.1.1)$$

თუმცა ნიუტონს არ აუხსნია, თუ საიდან მივიდა ამ ფორმულამდე. შემდგომში მან დატოვა დასკვნების მონახაზები, რომლებიც გამოქვეყნდა მხოლოდ 1727-1729 წწ-ში, როდესაც უკვე მთავრდებოდა ვარიაციული აღრიცხვის შექმნის პირველი ეტაპი. მოგვიანებით მოხდა მათი ლათინურიდან გადმოთარგმნა, საიდანაც ჩანს, რომ ნიუტონი ფლობდა ვარიაციული აღრიცხვის იმ ელემენტებს, რომლებიც შემდგომში შეიმუშავეს ლაგრანჟმა და ეილერმა.

ვარიაციული აღრიცხვის თანამედროვე აპარატის გამოყენებით მოვახდინოთ ნიუტონის აეროდინამიკური ამოცანის ფორმალიზება:

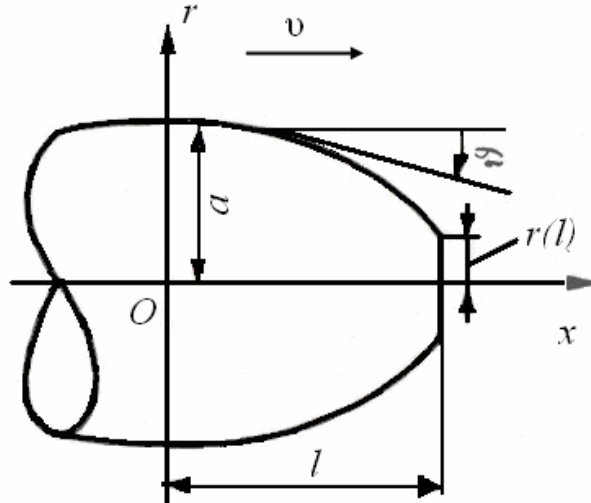
ვთქვათ, Ox ღერძის მქონე ბრუნვის სხეული მოძრაობს v ($v = |v| = const$) სიჩქარით ნიუტონისეულ გარემოში და ეჯახება მასში განაწილებულ ბურთულებს. ნიუტონისეულს უწოდებენ იშვიათ გარემოს, მასში განაწილებული აბსოლუტურად დრეკადი ბურთულებით. ამოცანა მდგომარეობს შემდგომში: განვსაზღვროთ ბრუნვის სხეულის მინიმალური წინააღმდეგობის მქონე წინა ნაწილის ცხვირა ნაწილის ოპტიმალური ფორმა. დავუშვათ, რომ Ox ღერძი მყარად არის დაკავშირებული სხეულთან და მიმართულია v სიჩქარის ვექტორის მიმართულებით. სხეულზე მოქმედი გარემოს წინააღმდეგობის Q ძალა ტოლია [37]:

$$Q = 2\pi(r(l))^2 - 2\pi\int_0^l C(\vartheta)r(x)r'(x)dx. \quad (3.1.2)$$

სადაც, $q = 0,5\rho v^2$ დინამიური წნევაა; ρ – გარემოს სიმკვრივე; $v = |v|$ სიჩქარის აბსოლუტური მნიშვნელობა; $r = r(x)$ – ბრუნვის სხეულის კვეთის რადიუსია, ბრუნვის სხეულის მაქსიმალური რადიუსის წერტილიდან x მანძილზე (მიდელევის კვეთის $a = r(0)$ რადიუსიდან); ϑ – მიდელევის კვეთიდან x მანძილზე მსახველის დახრის კუთხე (კუთხე, მსახველის მხებსა და Ox ღერძს შორის ათვლილი საათის ისრის მიმართულებით); l – სხეულის სიგრძე; $C(\vartheta)$ – გარემოს წინააღმდეგობის ადგილობრივი კოეფიციენტი, რომელიც ტოლია:

$$C(\vartheta) = \begin{cases} 2 \sin^2 \vartheta, & \vartheta > 0 \\ 0, & \vartheta \leq 0 \end{cases}.$$

(3.1.2) გამოსახულებაში წინააღმდეგობის Q ძალისათვის ჩართულია $2\pi q(r(l))^2$, რათა გათვალისწინებული იქნეს შესაძლო ბრტყელი დაბლაგვება სხეულის წინა ნაწილში (ნახ. 3.2)



ნახ. 3.2 ბრუნვის სხეული

საჭიროა გავიგოთ ბრუნვის სხეულის ისეთი $r(x)$ პროფილი, რომლის დროსაც q , l -ის და a ფუნქციონალის მოცემული მნიშვნელობებისათვის Q ღებულობს მინიმალურ მნიშვნელობას. გარდავქმნათ ინტეგრალი Q -სთვის. ამისათვის გამოვიყენოთ $C(\vartheta) = 2 \sin^2 \vartheta$, იგივეობა $r'(x) = -tg \vartheta$ და ტრიგონომეტრიული ფორმულა $\sin^2 \vartheta = \frac{tg^2 \vartheta}{1 + tg^2 \vartheta}$. თუ შემოვიტანთ $u = tg \vartheta$

მართვას, მივიღებთ:

$$-2\pi q \int_0^1 C(\vartheta) r(x) r'(x) dx = 4\pi q \int_0^1 \frac{ru^3}{1+u^2} dx$$

ამ გარდაქმნების გათვალისწინებით საწყისი ამოცანა ფუნქციონალისთვის დაიყვანება ლაგრანჟის ამოცანაზე პონტრიაგინის ფორმით.

$$I[r, u] = \frac{Q}{4\pi q} = \frac{1}{2} (r(l))^2 + \int_0^1 \frac{ru^3}{1+u^2} dx. \quad (3.1.3)$$

შემდეგი დიფერენციალური კავშირით

$$r' = -u. \quad (3.1.4)$$

მარცხენა ბოლოს მოცემულია დამაგრების პირობა $r(0) = a$, ხოლო მარჯვენა ბოლო თავისუფალია.

შემოვიტანოთ x, r, p კანონიკური ცვლადები და ჰამილტონის ფუნქცია

$$H(x, r, u, p) = -pu - \frac{ru^3}{1+u^2}. \quad (3.1.5)$$

დიფერენციალურ განტოლებათა კანონიკური სისტემა მოცემულ შემთხვევაში შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$r' = h'_p, \quad p' = -H'_r. \quad (3.1.6)$$

ამ სისტემის პირველი განტოლება ექვივალენტურია $r' = -u$ კავშირისა, ხოლო მეორე დაიყვანება შემდეგ თანაფარდობაზე: $p' = \frac{u^3}{1+u^3}$. (3.1.6) სისტემას უნდა დაემატოს ალგებრული განტოლება $H'_u = 0$, რომელსაც მოცემულ შემთხვევაში შემდეგი სახე აქვს:

$$-p - \frac{ru^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2} = 0.$$

დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას დავუმატოთ ასევე სასაზღვრო პირობები მარცხენა $r(0) = a$ კიდეზე და ტრანსვერსალობის პირობა მარჯვენა კიდეზე, რომელსაც ამოცანისთვის შერეული

$T[r(x_2)] + \int_{x_1}^{x_2} f^0(x, r, u) dx$ ფუნქციონალით აქვს სახე $p(x_2) = -T'_r[r(x_2)]$, ხოლო

მოცემულ შემთხვევაში (3.1.3)-ის გათვალისწინებით ჩაიწერება შემდეგი სახით: $p(l) = -r(l)$.

მაშასადამე, მიიღება განტოლებათა მთელი სისტემა

$$\begin{cases} r' = -u, \\ p' = \frac{u^3}{1+u^2}, \\ -p - \frac{ru^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2} = 0, \\ r(0) = a, \\ p(l) = -r(l) \end{cases} \quad (3.1.7)$$

მოვახდინოთ (3.1.7) სისტემის არა პირდაპირი ინტეგრირება, არამედ მხედველობაში მივიღოთ, რომ ჰამილტონის ფუნქცია პიდაპირ არ არის დამოკიდებული დამოუკიდებელ x ცვლადზე. ამ შემთხვევაში თვით ჰამილტონის ფუნქცია წარმოადგენს სისტემის პირველ ინტეგრალს, ანუ $H = const$. (7) სისტემის მესამე განტოლების დახმარებით (5)-დან ჰამილტონის H ფუნქციიდან გამოვრიცხოთ ცვლადი p . მაშინ $H = const$ დამოკიდებულება შეიძლება შემდეგი სახით ჩაიწეროს

$$\frac{2ru^3}{(1+u^2)^2} = const.$$

შემდეგ, (3.1.7) სისტემის მესამე განტოლება მართებულია ნებისმიერი $x \in [0, l]$, მათ შორის როცა $x = l$, ე. ი.

$$-p(l) - \frac{r(l)u^2(l)(3+u^2(l))}{(1+u^2(l))^2} = 0, \quad (3.1.8)$$

ან სისტემის მეხუთე განტოლების გათვალისწინებით,

$$r(l) \left(1 - \frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2} \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad (3.1.9)$$

მაგრამ, ეს შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $r(l) = 0$ ან $u(l) = 1$. პირველ შემთხვევაში, როდესაც $r(l) = 0$, (3.1.8) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ $H(l) = 0$, ანუ

$$\frac{2ru^3}{(1+u^2)^2} \equiv 0,$$

საიდანაც ან $r = 0$, ან $u = tg \vartheta = 0$. ეს მიუთითებს სიტუაციაზე, რომლის დროსაც სხეულის პროფილი ემთხვევა ბრუნვის Ox ღერძს. მეორე შემთხვევაში, როდესაც $u(l) = 1$, (3.1.8) გამოსახულებიდან ვღებულობთ ტოლობას $H(l) = r(l)/2$, რომლის გათვალისწინებით თვით (3.1.8) თანაფარდობა შეიძლება შემდეგნაირად ჩაიწეროს:

$$\frac{2ru^3}{(1+u^2)^2} \equiv \frac{r(l)}{2},$$

საიდანაც ვპოულობთ

$$r(x) = r(l) \frac{(1+u^2)^2}{4u^3}. \quad (3.1.10)$$

ეს დამოკიდებულება ჩავსვით (3.1.7) სისტემის პირველ განტოლებაში:

$$r(l) \frac{d}{dx} \left(\frac{(1+u^2)^2}{4u^3} \right) = -u,$$

ან

$$-\frac{dx}{r(l)} = \frac{1}{4u} \left(-\frac{3}{u^5} - \frac{2}{u^3} + \frac{1}{u} \right) du.$$

მივიღებთ დიფერენციალურ განტოლებას გამყოფი განცალკეადი ცვლადებით, რომელიც შეიძლება ვაინტეგრროთ:

$$-\int_l^x \frac{dx}{r(l)} = \frac{1}{4u} \int_1^u \left(-\frac{3}{u^5} - \frac{2}{u^3} + \frac{1}{u} \right) du,$$

საიდანაც

$$\frac{l-x}{r(l)} = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{4u^4} + \frac{1}{u^2} + \ln u - \frac{7}{4} \right). \quad (3.1.11)$$

(3.1.10) და (3.1.11) -ს გაერთიანებით, მივიღებთ $r(x)$ ფუნქციის პარამეტრულ განტოლებას, რომელიც განსაზღვრავს გარსმდენი სხეულის საძიებელ კონტურს:

$$\begin{cases} r(x) = r(l) \frac{(1+u^2)^2}{4u^3}, \\ x = l - \frac{r(l)}{4} \left(\frac{4}{4u^4} + \frac{1}{u^2} + \ln u - \frac{7}{4} \right). \end{cases} \quad (3.1.12)$$

მარცხენა ბოლოზე $r(0) = a$ სასაზღვრო პირობების დახმარებით ამ პარამეტრული გამოსახულებიდან შესაძლებელია ვიპოვოთ $r(l)$ -ის მნიშვნელობა და დახრის კოეფიციენტი $u_0 = tg \vartheta_0$, როცა $x=0$. რასაც მივყავართ ტრანსცენდენტურ განტოლებათა სისტემამდე

$$\begin{cases} \frac{a}{r(l)} = \frac{4u_0^3}{(1+u_0^2)^2}, \\ \frac{l}{r(l)} = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{4u_0^4} + \frac{1}{u_0^2} + \ln u_0 - \frac{7}{4} \right). \end{cases}$$

ჩავსვით მიღებული ამონახსნი, ნიუტონის მიერ შემოთავაზებულ ამონახსნში. დავუბრუნებთ ნახ.3.1-ს. მოცემულია გვაქვს $|MN| = r$, $|BM| = l - x$,

$|BG| = r(l)$, $BPG = \vartheta$. ნიუტონის მოცემულობის შესაბამისად, $\frac{|BG|}{|BP|} = \operatorname{tg} \vartheta$,

$u = \operatorname{tg} \vartheta$ მართვის გათვალისწინებით, ვღებულობთ $|BP| = \frac{|BG|}{u}$, ან $|BP| = \frac{r(l)}{u}$.

GBP მართკუთხა სამკუთხედიდან გვექნება

$$|GP|^2 + |BG|^2 + |BP|^2 = r^2(l) \left(1 + \frac{1}{u^2} \right).$$

თუ მოვახდენთ ნიუტონის (3.1.1) პროპორციაში მიღებული აღნიშვნების ჩასმას მივიღებთ:

$$\frac{r}{r(l) \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}}} = \frac{r^3(l) \left(1 + \frac{1}{u^2} \right)^{3/2}}{\frac{4r(l)}{u} r^2(l)},$$

ანუ

$$r = r(l) \frac{(1 + u^2)^2}{4u^3}.$$

ჩვენ მივიღეთ $r(x)$ ფუნქციის პირველი განტოლება პარამეტრული სახით. მაშასადამე, ნიუტონმა ნამდვილად ამოხსნა დასმული ამოცანა, მაგრამ მისი აზრი გასაგები გახდა ბევრად უფრო გვიან, ვარიაციული აღრიცხვის აპარატის განვითარების შემდგომ.

3.2. აირის ნაკადში, უმცირესი წინააღმდეგობის მქონე ბრუნვის სხეულის, ფორმის განსაზღვრა

თუ ჩავთვლით, რომ აირის სიმკვრივე საკმაოდ მცირეა და მოლეკულები სხეულის ზედაპირიდან სარკისებურად სხლტებიან, წნევის მდგენელის ნორმალისთვის გვექნება შემდეგი გამოსახულება [38]:

$$p = 2\rho v^2 \sin^2 \theta.$$

სადაც, ρ აირის სიმკვრივეა, ν აირის სიჩქარე სხეულთან მიმართებაში, ხოლო θ კუთხე სიჩქარესა და მის ტანგენციალურ მდგენელს შორის. წნევა ზედაპირის პერპენდიკულარულია, ამიტომ $(1+y'^2)^{1/2} dx$ სიგანის და $y(x)$ რადიუსის მქონე რგოლზე მოქმედი ძალის მდგენელი Ox ღერძის მიმართ ჩაიწერება შემდეგნაირად

$$dF = 2\rho\nu^2 \sin^2 \theta \left[2\pi y(1+y'^2)^{1/2} \right] \sin \theta dx. \quad (3.2.1)$$

Ox ღერძის დადებითი მიმართულებით მოქმედი სრული ძალა ტოლი იქნება

$$F = \int_0^l 4\pi\rho\nu^2 \sin^3 \theta y(1+y'^2)^{1/2} dx. \quad (3.2.2)$$

სიმარტივისთვის დავუშვათ,

$$\sin \theta = \frac{y'}{(1+y'^2)^{1/2}} \approx y'$$

მაშინ წინააღმდეგობის ძალა ტოლი იქნება:

$$F = 4\pi\rho\nu^2 \int_0^l y'^3 y dx. \quad (3.2.3)$$

ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ვიპოვოთ ისეთი $y(x)$ ფუნქცია, რომლის დროსაც F ძალა მიაღწევს შესაძლო უმცირეს მნიშვნელობას, ამასთან

$$y(0) = 0, \quad y(l) = R. \quad (3.2.4)$$

ეილერის განტოლება (3.2.3) ფუნქციონალისთვის მიიღებს სახეს:

$$y'^3 - 3 \frac{d}{dx} (y y'^2) = 0. \quad (3.2.5)$$

ამ განტოლების კერძო ამონახსნი $y = 0$ მისაღებია, ვინაიდან აკმაყოფილებს (3.2.4)-ის საწყის პირობებს. (3.2.5) განტოლება შეიძლება შემდეგი სახით გადაიწეროს

$$y'^3 + 3y y' y'' = 0. \quad (3.2.6)$$

(3.2.6)-ის ორივე ნაწილის y' -ზე გამრავლებით შევნიშნავთ, რომ მარცხენა ნაწილი ტოლია $(y'^3 y)'$. ინტეგრირებით მივიღებთ:

$$y' y = \tilde{C}_1^3.$$

საიდანაც,

$$y' = \frac{\tilde{C}_1}{\sqrt[3]{y}} \quad \text{და} \quad y = (C_1 x + C_2)^{3/4}. \quad (3.2.7)$$

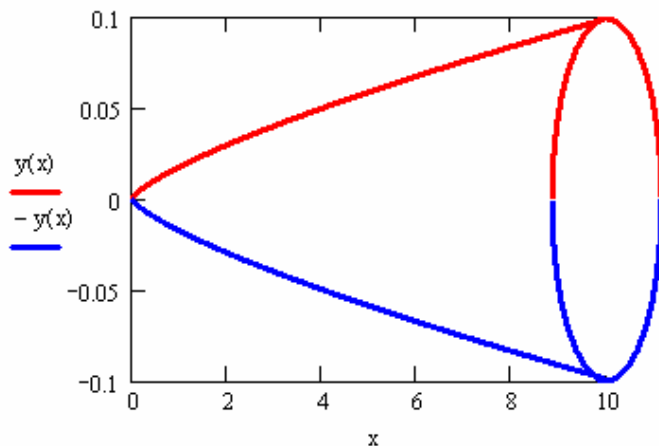
(4)-ის სასაზღვრო პირობების გამოყენებით ვღებულობთ

$$C_1 = \frac{R^{4/3}}{l}, \quad C_2 = 0.$$

საიდანაც,

$$y = R \left(\frac{x}{l} \right)^{3/4}.$$

მაშასადამე, კონტური მოცემული კიდურა წერტილებით, რომლის დროსაც სხეულის წინააღმდეგობის ძალა მინიმალურია წარმოადგენს $\frac{3}{4}$ ხარისხიან პარაბოლას (ნახ.3.3).



ნახ. 3.3 უმცირესი წინააღმდეგობის მქონე ბრუნვის სხეული

3.3 თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ბლანტი სითხით

გარსდენის ამოცანის ამოხსნა არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდით

3.3.1. თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ბლანტი სითხით გარსდენის

ამოცანის ამოხსნა არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდით სიჩქარის

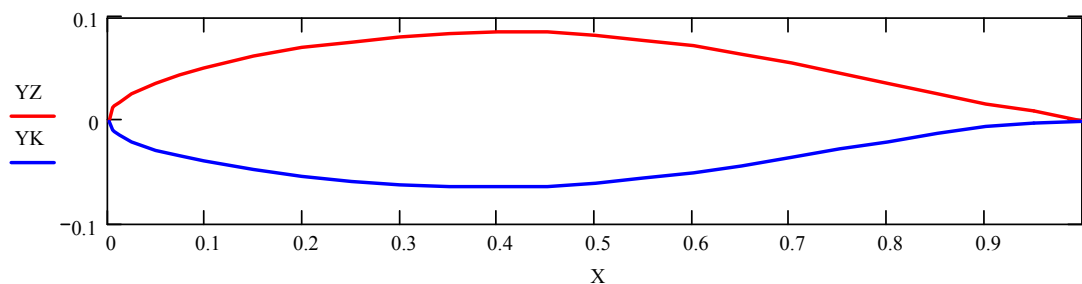
სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას

მოცემულია ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული თვითმფრინავის ფრთის პროფილი, რომლის უკუმში, ბლანტი სითხით გარსდენის ამოცანას ვხსნით არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდით. ვინაიდან საჭიროა აერთდროულად რამოდენიმე ფუნქციის მინიმიზაცია, კერძოდ, ინტეგრალური ცდომილების ფუნქციისა და პროფილის ზედა და ქვედა საზღვრებზე მიკვრის პირობებიდან გამომდინარე დამატებითი კინემატიკური პირობების ფუნქციებისა, ამიტომ ადგილი აქვს მრავალკრიტერიუმიანი ოპტიმიზაციის ამოცანას, რომლის შემოფარგვის პირობებად აღებული გვაქვს მასის შენახვის კანონი და ბერნულის ინტეგრალური განტოლება ბლანტი სითხეებისათვის. ამოცანას ვხსნით ფლექტელის მეთოდით. სიმარტივისთვის მეთოდის რეალიზებას ვახდენთ პროგრამა Mathcad13–ის საშუალებით. პროფილის ზედა და ქვედა საზღვრები მოიცემა მათი კოორდინატების მატრიცების სახით [39]:

ZEDA :=	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.9502 & 0.0096 \\ 0.9004 & 0.0166 \\ 0.8506 & 0.02649 \\ 0.8006 & 0.03653 \\ 0.7507 & 0.04638 \\ 0.7006 & 0.05572 \\ 0.6505 & 0.06433 \\ 0.6007 & 0.07189 \\ 0.5502 & 0.07815 \\ 0.5 & 0.08271 \\ 0.4498 & 0.08522 \\ 0.3995 & 0.08569 \\ 0.3493 & 0.08426 \\ 0.2990 & 0.08123 \\ 0.2488 & 0.07658 \\ 0.1986 & 0.07018 \\ 0.1485 & 0.06175 \\ 0.0984 & 0.05069 \\ 0.0734 & 0.0438 \\ 0.0485 & 0.03557 \\ 0.0237 & 0.02506 \\ 0.0113 & 0.01805 \\ 0.0065 & 0.01422 \\ 0.0041 & 0.0117 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$
KVEDA:=	$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.9502 & -0.002077 \\ 0.9004 & -0.00617 \\ 0.8506 & -0.012867 \\ 0.8006 & -0.020425 \\ 0.7507 & -0.028274 \\ 0.7006 & -0.036096 \\ 0.6505 & -0.043587 \\ 0.6007 & -0.050331 \\ 0.5502 & -0.056208 \\ 0.5 & -0.06065 \\ 0.4498 & -0.063334 \\ 0.3995 & -0.064272 \\ 0.3493 & -0.06362 \\ 0.2990 & -0.061689 \\ 0.2488 & -0.058499 \\ 0.1986 & -0.053966 \\ 0.1485 & -0.047881 \\ 0.0984 & -0.03974 \\ 0.0734 & -0.034626 \\ 0.0485 & -0.0284 \\ 0.0237 & -0.020344 \\ 0.0113 & -0.014559 \\ 0.0065 & -0.011218 \\ 0.0041 & -0.008906 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}$

ვინაიდან X კოორდინატები პროფილის ორივე საზღვრისთვის ერთიდა-
იგივეა ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\begin{aligned} X &:= ZEDA^{(0)} \\ YZ &:= ZEDA^{(1)} \\ YK &:= KVEDA^{(1)} \end{aligned}$$



ნახ. 3.4 ექსპერიმენტის შედეგად მიღებული ფრთის პროფილი

ამოცანას ვხსნით $[X_0, X_N]$ ჰორიზონტალურ და $[Y_0, Y_N]$ ვერტიკალურ საზღვრებში, ანუ $G=[X_0, X_N] \times [Y_0, Y_N]$ დეკარტულ ნამრავლზე. ჩვენს შემთხვევაში

$$X_0 := -2 \quad X_N := 2 \quad Y_0 := -1 \quad Y_N := 1$$

$$q := 25$$

$$k_1 := 3$$

$$a_1 := -1$$

$$b_1 := 1$$

$$a_{11} := -0.1$$

$$b_{11} := 0.1$$

საბაზისო ფუნქციათა სისტემები მოიცემა ხარისხოვან ფუნქციათა ნამრავლის სახით შემდეგნაირად:

$$\phi(x, y, m, n) := x^m \cdot y^n; \quad (3.3.1)$$

$$\psi(x, y, m, n) := x^m \cdot y^n; \quad (3.3.2)$$

$$\sigma(x, y, m, n) := x^m \cdot y^n; \quad (3.3.3)$$

ხოლო საძებნი ფუნქციების გაშლას საბაზისო სისტემების მიმართ ვახდენთ შემდეგი სახით:

$$u(x, y, \alpha) := \sum_{m=0}^{k_1} \sum_{n=0}^{k_1} \alpha_{m,n} \cdot \phi(x, y, m, n) \quad (3.3.4)$$

$$v(x, y, \beta) := \sum_{m=0}^{k_1} \sum_{n=0}^{k_1} \beta_{m,n} \cdot \psi(x, y, m, n) \quad (3.3.5)$$

$$p(x, y, \gamma) := \sum_{m=0}^{k_1} \sum_{n=0}^{k_1} \gamma_{m,n} \cdot \sigma(x, y, m, n) \quad (3.3.6)$$

სადაც, $u(x, y, \alpha)$ და $v(x, y, \beta)$ ნაკადის სიქარის ვექტორის მდგენელებია, p -ნაკადის წნევა პროფილის ზედაპირზე, ხოლო α, β, γ – საძებნი კოეფიციენტებია.

ფრთის ამწევი ძალის კოეფიციენტი გამოითვლება შემდეგი ფორმულით:

$$C_y(\gamma) := \sum_{s=0}^q \left(p(X_s, YK_s, \gamma) - p(X_s, YZ_s, \gamma) \right) \quad (3.3.7)$$

ბლანტი სითხის პროფილის ზედაპირზე მიკვრის პირობებიდან გამომდინარე ადგილი აქვს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$RZEDA(\alpha, \beta) := \sum_{s=0}^q \left(u(X_s, YZ_s, \alpha)^2 + v(X_s, YZ_s, \beta)^2 \right) \quad (3.3.8)$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta) := \sum_{s=0}^q u(X_s, YK_s, \alpha)^2 \quad (3.3.9)$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta) := RKVEDA(\alpha, \beta) + \sum_{s=0}^q v(X_s, YK_s, \beta)^2 \quad (3.3.10)$$

რომლის მიხედვითაც მოცემულმა ფუნქციებმა უნდა მიიღონ ნულის ტოლი მნიშვნელობა. ანუ გვექნება მიზნის ფუნქციები:

$$RZEDA(\alpha, \beta) \rightarrow \min, \quad (3.3.11)$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta) \rightarrow \min. \quad (3.3.12)$$

დალამბერის პრინციპიდან გამომდინარე ჩავთვალოთ, რომ თვითმფრინავი გაჩერებულია და მას გარსედინება უკუმში ბლანტი სითხე (ბგერამდელი ჰაერის მასა). თუ ჩავთვლით, რომ შემხვედრი ნაკადის სიჩქარეთა ვექტორის ეპიურა საწყის $x=X_0$ კვეთში წარმოადგენს სწორ ხაზს, შესაბამისი სასაზღვრო პირობა $L_2(G)$ -ის მეტრიკით მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$IGR1(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{Y_0}^{Y_N} (u(X_0, y, \alpha) - 1)^2 dy + \int_{Y_0}^{Y_N} v(X_0, y, \beta)^2 dy \quad (3.3.13)$$

რომელიც ასევე უნდა იყოს ნულთან მიახლოებული, ანუ

$$IGR1(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow \min \quad (3.3.14)$$

ხოლო ჯამური-ინტეგრალური ცდომილება კი, შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$I(\alpha, \beta, \gamma) := IGR1(\alpha, \beta, \gamma) + RZEDA(\alpha, \beta) + RKVEDA(\alpha, \beta) \quad (3.3.15)$$

მოვახდინოთ დამხმარე ფუნქციების ფორმალიზება ბერნულის განტოლებებისთვის:

$$E1(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{Y0}^{YN} \left[p(X0, y, \gamma) + 1.1 \cdot (u(X0, y, \alpha)^2 + v(X0, y, \beta)^2) \right] dy \quad (3.3.16)$$

რომლის მიხედვითაც გამოითვლება ენერგია საწყის კვეთში

$$E2(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{Y0}^{YN} \left[p(XN, y, \gamma) + 1.1 \cdot (u(XN, y, \alpha)^2 + v(XN, y, \beta)^2) \right] dy \quad (3.3.17)$$

ენერგია საბოლოო კვეთში

$$E3(\alpha, \beta, \gamma) := 0.11 \cdot \frac{XN - X0}{YN - Y0} \int_{Y0}^{YN} \frac{u(XN, y, \alpha)^2 + v(XN, y, \beta)^2 + (u(X0, y, \alpha)^2 + v(X0, y, \beta)^2)}{4} dy$$

$$E4(\alpha, \beta, \gamma) := E3(\alpha, \beta, \gamma) + 0.11 \cdot \frac{XN - X0}{YN - Y0} \int_{Y0}^{YN} \frac{\sqrt{(u(X0, y, \alpha)^2 + v(X0, y, \beta)^2) \cdot (u(XN, y, \alpha)^2 + v(XN, y, \beta)^2)}}{2} dy \quad (3.3.18)$$

ხახუნზე დახარჯული ენერგია

პროგრამის რეალიზაციისათვის აუცილებელია საწყისი მონაცემები

შერჩევა

$m := 0..k1$

$n := 0..k1$

$\alpha_{m,n} := a1 + (b1 - a1) \cdot \text{rnd}(1)$

$\beta_{m,n} := a11 + (b11 - a11) \cdot \text{rnd}(1)$

$\gamma_{m,n} := a1 + (b1 - a1) \cdot \text{rnd}(1)$

$$\alpha = \begin{pmatrix} -0.997 & -0.613 & 0.17 & -0.299 \\ 0.646 & -0.652 & 0.421 & -0.392 \\ -0.817 & -0.705 & 0.977 & -0.762 \\ -0.982 & 0.063 & 0.204 & -0.668 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} -0.01 & -0.089 & 0.057 & 0.004 \\ 0.075 & 0.091 & 0.008 & -0.008 \\ 0.072 & 0.056 & 0.099 & 0.022 \\ -0.047 & 0.068 & -0.025 & 0.035 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} -0.982 & -0.448 & 0.176 & 0.675 \\ -0.03 & 0.487 & -0.084 & 0.489 \\ 0.198 & 0.47 & 0.145 & -0.697 \\ -0.15 & 0.034 & 0.503 & -0.662 \end{pmatrix}$$

არაწრფივი დაპროგრამების ამოცანის ამოხსნისათვის სისტემას გააჩნია შეზღუდვების ბლოკი, რომელშიც შეტანილი უნდა იქნეს შეზღუდვები. ჩვენს შემთხვევაში შეზღუდვები წარმოადგენს მასის შენახვის კანონს, ბერნულის განტოლებას და დამატებით კინემატიკურ პირობებს:

მასის შენახვის კანონი

$$\int_{Y_0}^{Y_N} u(X_0, y, \alpha) dy = \int_{Y_0}^{Y_N} u(X_N, y, \alpha) dy + \int_{X_0}^{X_N} (v(x, Y_0, \beta) + v(x, Y_N, \beta)) dx \quad (3.3.19)$$

დამატებითი კინემატიკური პირობები,

$$\int_{Y_0}^{Y_N} u(X_0, y, \alpha) dy \geq 0 \quad (3.3.20)$$

$$\int_{Y_0}^{Y_N} u(X_0 + 0.1, y, \alpha) dy \geq 0$$

$$0.999 \leq p(0, 0, \gamma) \leq 1.001$$

წნევა პროფილის ცხვირზე უნდა იყოს 1-ს ტოლი (ნორმირება)

$C_y(\gamma) \geq 0$ აუცილებელი პირობაა რომ ამწევი ძალა იყოს დადებითი

ბერნულის განტოლება, რომლის მიხედვითაც ფრთის პროფილის საწყის და საბოლოო კვეთში ენერჯიათა სხვაობა ტოლია პროფილის ზედაპირის გასწვრივ ხახუნზე დახარჯული ენერჯიისა:

$$E1(\alpha, \beta, \gamma) - E2(\alpha, \beta, \gamma) = E4(\alpha, \beta, \gamma) \quad (3.3.21)$$

მიზნის ფუნქციის მინიმიზაცია და საძებნი α, β, γ კოეფიციენტების გამოთვლა ხორციელდება შემდეგი ოპერატორის საშუალებით:

$$S := \text{Minimize}(I, \alpha, \beta, \gamma) \quad (3.3.22)$$

სადაც,

$$\alpha := S_0$$

$$\beta := S_1$$

$$\gamma := S_2$$

გამოთვლის შედეგად ვღებულობთ:

$$S = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.01 & -0.076 & 0.043 & -0.134 \\ -0.103 & -0.018 & 0.152 & -0.158 \\ 0.136 & 0.103 & 0.259 & 0.02 \\ -0.027 & 0.041 & 0.092 & 0.039 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.003 & -0.039 & 0.016 & 0.002 \\ 0.019 & 0.032 & 0.002 & -0.004 \\ -0.001 & 0.037 & 0.02 & 0.012 \\ 0.001 & 0.003 & -0.004 & 0.012 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1.001 & -0.224 & 0.044 & 0.338 \\ -0.008 & 0.244 & -0.021 & 0.244 \\ 0.05 & 0.235 & 0.036 & -0.348 \\ -0.052 & 0.017 & 0.071 & -0.331 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\text{IGR}(\alpha, \beta, \gamma) = 0.004$$

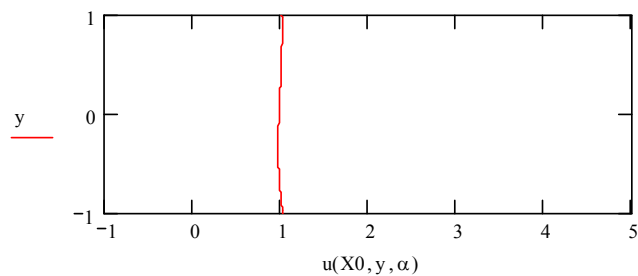
$$I(\alpha, \beta, \gamma) = 0.011$$

$$C\gamma(\gamma) = 0.157$$

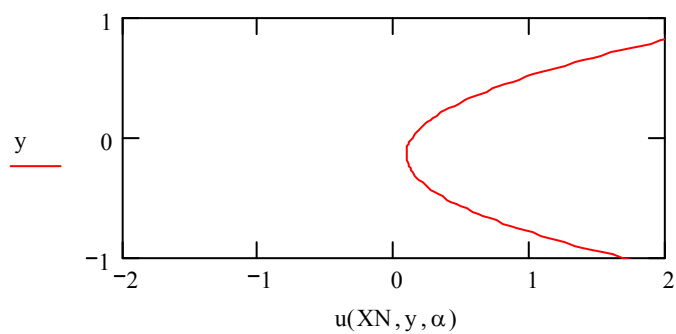
$$\text{RZEDA}(\alpha, \beta) = 0.004$$

$$\text{RKVEDA}(\alpha, \beta) = 0.003$$

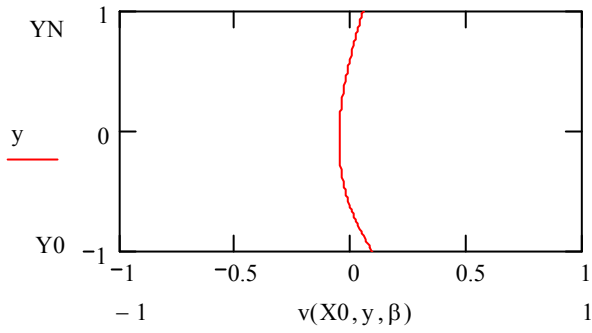
სიჩქარეთა ველის ეპიურებს სხვადასხვა კვეთში აქვს შემდეგი სახე:



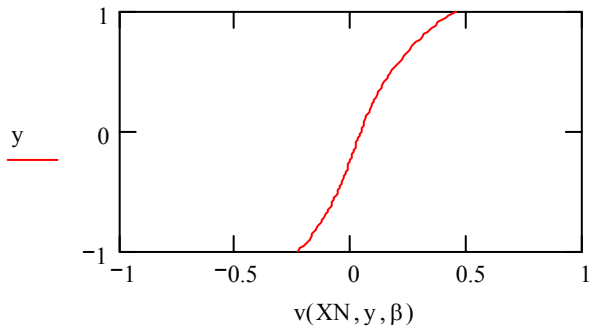
ა) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში



ბ) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში



გ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში



დ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

ნახ. 3.5 სიჩქარეთა ველის ეპიურები პროფილის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას

წნევათა განაწილებები პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე გამოითვლება

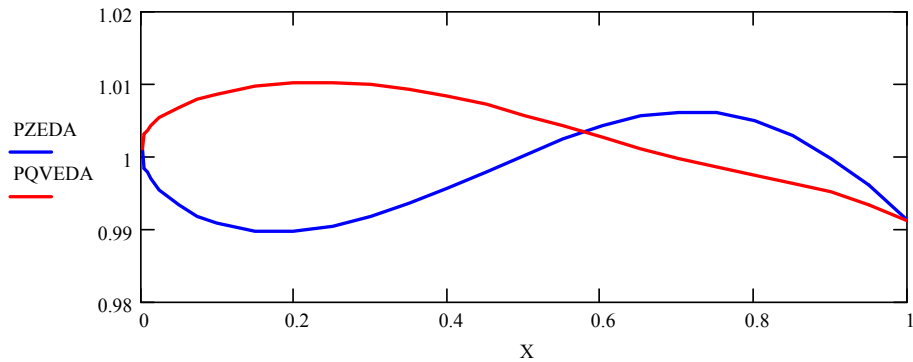
შემდეგნაირად:

$$i_1 := 0..q$$

$$PZEDA_{i_1} := p(X_{i_1}, YZ_{i_1}, \gamma)$$

$$PQVEDA_{i_1} := p(X_{i_1}, YK_{i_1}, \gamma)$$

ხოლო შესაბამისი გრაფიკული სურათი ნაჩვენებია ნახ. 3.6 -ზე



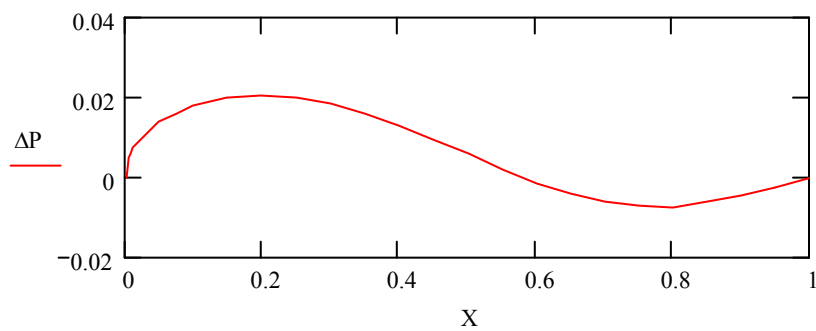
ნახ. 3.6 წნევათა განაწილებები პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე სიჩქარის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას

ხოლო წნევათა სხვაობა პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის გამოითვლება ფორმულით

$$\Delta P := PQVEDA - PZEDA$$

(3.3.23)

შესაბამისი გრაფიკული სურათი კი ნაჩვენებია ნახ. 3.7-ზე



ნახ. 3.7 წნევათა სხვაობა პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას

მოვახდინოთ მიღებული შედეგების ანალიზი.

$$IGR1(\alpha, \beta, \gamma) = 0.004$$

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = 0.011$$

$$C\gamma(\gamma) = 0.157$$

$$RZEDA(\alpha, \beta) = 0.004$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta) = 0.003$$

როგორც ჩანს მიზნის ფუნქციის შემადგენელი კომპონენტები: $RZEDA(\alpha, \beta)$, $RKVEDA(\alpha, \beta)$, $IGR1(\alpha, \beta, \gamma)$ ნულთან მიახლოებული მნიშვნელობებია, ხოლო თვით ჯამური ინტეგრალური ცდომილების სიზუსტე 10%-ია, ამიტომ ჩვენს რიცხვით ამონახსნს გააჩნიათ ფიზიკური კრებადობა ექსპერიმენტულ მონაცემებთან. ხოლო რაც შეეხება ამწევი ძალის კოეფიციენტს, მისი სიმცირე განპირობებულია იმით, რომ ფრთის პროფილის გარსდენას განვიხილავთ ნულოვანი დასმის კუთხით, რომლის დროსაც ამწევი ძალა მინიმალურია. ამავე დროს წნევათა განაწილება ქვედა საზღვარზე, მეტია, ვიდრე ზედა საზღვარზე, რაც აუცილებელი პირობაა ამწევი ძალის წარმოშობისა და მიღებული ეპიურების ფორმები აკმაყოფილებს მოთხოვნებს, ანუ საწყის კვეთში სიჩქარის ვექტორის u მდგენელი $u(x_0) = 1$ და წარმოადგენს სწორ ხაზს, ხოლო $v(x_0) = 0$ (3.3.13)

3.3.2 თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ბლანტი სითხით გარსდენის ამოცანის ამოხსნა არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდით სიჩქარის პარაბოლური ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც თვითმფრინავის ფრთის პროფილს ეჯახება პარაბოლური ეპიურის მქონე სიჩქარეთა ნაკადი. ვიანაიდან ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი. და მაშასადამე, შესაბამისი პროგრამაც ანალოგიურია ზემოთგანხილულისა, ამიტომ ამ პარაგრაფში ყურადღებას გავამახვილებთ მხოლოდ იმ განსხვავებაზე რაც არსებობს ამ ორ შემთხვევას შორის, და მოვახდენთ პროგრამის რეალიზაციის შედეგად მიღებული შედეგების ფორმირებასა და ანალიზს.

იმისათვის რომ სიჩქარეთა ეპიურა საწყის კვეთში იყოს პარაბოლური ფორმის აუცილებელია, რომ 3.13 ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$\text{IGR}(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{Y_0}^{Y_N} \left[u(X_0, y, \alpha) - (Y_0^2 - y^2) \right]^2 dy + \int_{Y_0}^{Y_N} v(X_0, y, \beta)^2 dy \quad (3.3.24)$$

ამ შემთხვევისათვის მიღებულ შედეგებს აქვთ სახე:

$$S = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.005 & -0.117 & 0.041 & -0.132 \\ -0.076 & -0.012 & 0.17 & -0.161 \\ 0.125 & 0.095 & 0.043 & 0.086 \\ -0.04 & 0.042 & 0.105 & 0.059 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.003 & -0.038 & 0.015 & 0.002 \\ 0.021 & 0.03 & 0.002 & -0.004 \\ 0.001 & 0.038 & 0.02 & 0.012 \\ 0.001 & 0.001 & -0.004 & 0.012 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1.001 & -0.224 & 0.044 & 0.338 \\ -0.008 & 0.244 & -0.021 & 0.244 \\ 0.05 & 0.235 & 0.036 & -0.348 \\ -0.045 & 0.017 & 0.098 & -0.331 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{IGR}(\alpha, \beta, \gamma) = 0.004$$

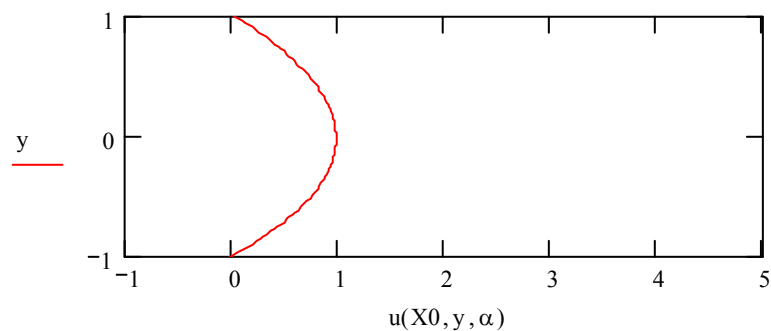
$$I(\alpha, \beta, \gamma) = 0.012$$

$$C_y(\gamma) = 0.156$$

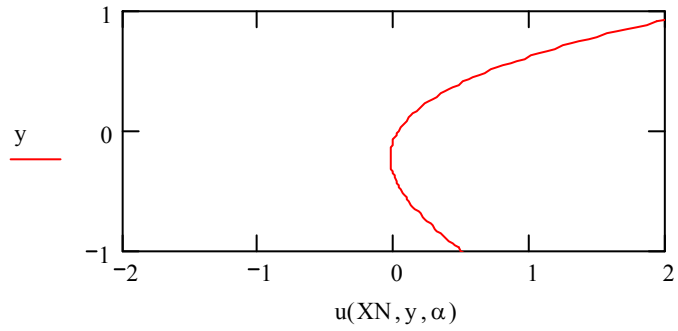
$$\text{RZEDA}(\alpha, \beta) = 0.005$$

$$\text{RKVEDA}(\alpha, \beta) = 0.003$$

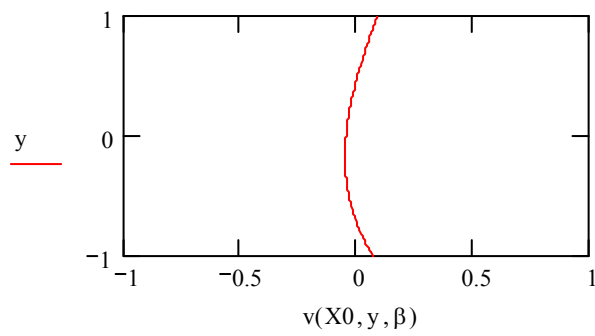
სიჩქარეთა ველის ეპიურებს სხვადასხვა კვეთში აქვს შემდეგი სახე:



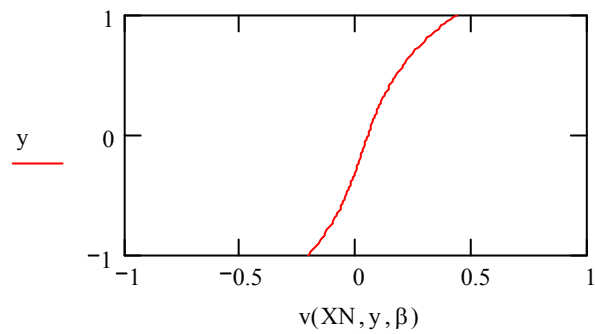
ა) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში



ბ) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

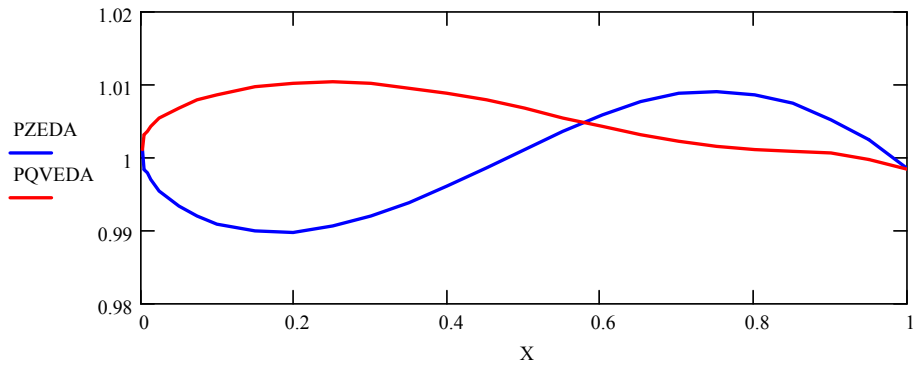


გ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში

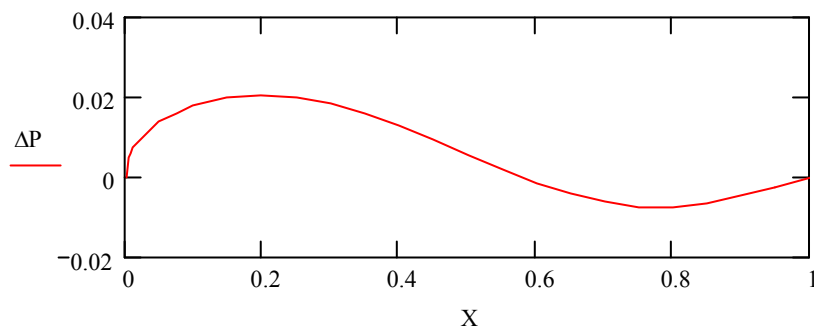


დ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

ნახ. 3.8 წნევათა სხვაობა პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას



ნახ. 3.9 წნევათა განაწილებები პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე სიჩქარის პარაბოლური ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას



ნახ.3.10 წნევათა სხვაობა პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს სიჩქარის პარაბოლური ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას

ამ შემთხვევაშიც, ისევე როგორც წინა შემთხვევაში ჩვენს რიცხვით ამონახსნს გააჩნიათ ფიზიკური კრებადობა ექსპერიმენტულ მონაცემებთან.

3.4 თვითმფინავის ფრთის პროფილის ქვედა საზღვრის ოპტიმიზაცია მისი ბგერამდელი სიჩქარის ნაკადით გარსდენისას

3.4.1 თვითმფინავის ფრთის პროფილის ქვედა საზღვრის ოპტიმიზაცია მისი ბგერამდელი, სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე სიჩქარის ნაკადით გარსდენისას

თვითმფრინავის ფრთას უწოდებენ ოპტიმალურს, თუ თვითმფრინავის ფრთის ხარისხი K აღწევს მაქსიმალურ მნიშვნელობას

$$K = \frac{C_y}{C_x}, \quad C_y = \int_0^1 (Pkveda(x) - Pzeda(x)) dx, \quad C_x = \int_{Lmarcxena} P(L) dL - \int_{Lmarjvena} P(L) dL \quad (3.4.1)$$

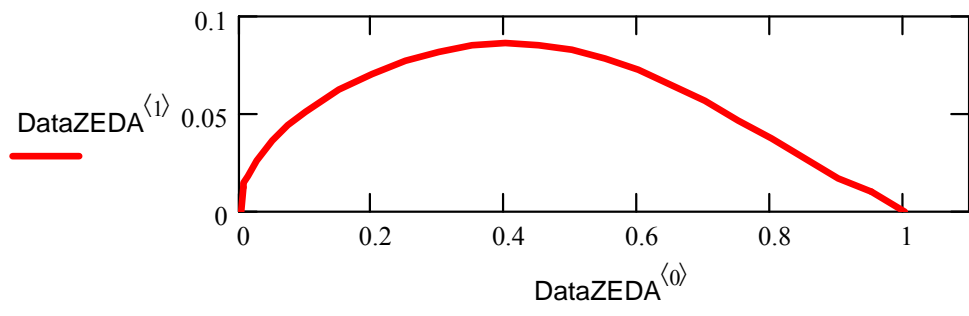
როგორც ზემოაღნიშნული ფორმულებიდან ჩანს ხარისხის მაქსიმიზაციის მიღწევა შესაძლებელია, C_y ამწევი ძალის გაზრდით ან C_x წინააღმდეგობის ძალის შემცირებით. ჩვენი ამოცანის მიზანს წარმოადგენს ოპტიმალური ფრთის მიღება ამწევი ძალის კოეფიციენტის მაქსიმიზაციის პირობით. ამავე დროს უნდა გავითვალისწინოთ ჯამური ინტეგრალური ცდომილების მინიმიზაციის პირობაც [40-41]. ამ შემთხვევაში წინა ალგორითმთან შედარებით გვექნება დამატებით კიდევ ერთი მიზნის ფუნქცია, რომელიც ითვალისწინებს ამწევი ძალის მაქსიმიზაციას [45].

განვიხილავთ პროფილს მოცემული ზედა საზღვრით და ვეძებთ ქვედა საზღვარს. მოვახდინოთ საზღვრის გარდაქმნა ისე, რომ ფრთის პროფილი მოთავსდეს $[0;1]$ შუალედში. მაშინ საძიებელი ქვედა საზღვარი უნდა ჩაიწეროს ანალიზურად როგორც კუბური პარაბოლა:

$$fkveda(x, a, b) = (x - 1)(ax^2 + bx) \quad (3.4.2)$$

ზედა საზღვრის კოორდინატები ისევე როგორც წინა შემთხვევაში მოიცემა მატრიცის სახით:

DataZEDA :=	1.0	0.0
	0.9502	0.0096
	0.9004	0.0166
	0.8506	0.02649
	0.8006	0.03653
	0.7507	0.04638
	0.7006	0.05572
	0.6505	0.06433
	0.6007	0.07189
	0.5502	0.07815
	0.5	0.08271
	0.4498	0.08522
	0.3995	0.08569
	0.3493	0.08426
	0.2990	0.08123
	0.2488	0.07658
	0.1986	0.07018
	0.1485	0.06175
	0.0984	0.05069
	0.0734	0.0438
	0.0485	0.03557
	0.0237	0.02506
	0.0113	0.01805
	0.0065	0.01422
	0.0041	0.0117
	0.0	0.0



ნახ. 3.11 ფრთის პროფილის მოცემული ზედა საზღვარი

ოპტიმალური ქვედა საზღვარი უნდა ვიპოვოთ მისი a და b კოეფიციენტების საშუალებით. სიჩარეთა ველის კოორდინატებისა და წნევის საპოვნელად კვლავ ვიყენებთ ფორმულებს (3.3.1) – (3.3.6). ხოლო

ბლანტი სითხის შემთხვევაში, მიკვრის პირობებიდან გამომდინარე სასზღვრო პირობებს ექნება შემდეგი სახე:

$$RZEDA(\alpha, \beta) := \sum_{s=0}^q \left(u(X_s, Y_s, \alpha)^2 + v(X_s, Y_s, \beta)^2 \right)$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) := \sum_{s=0}^q u[X_s, (X_s - 1) \cdot [a \cdot (X_s)^2 + b \cdot X_s], \alpha]^2$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) := RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) + \sum_{s=0}^q v[X_s, (X_s - 1) \cdot [a \cdot (X_s)^2 + b \cdot X_s], \beta]^2 \quad (3.4.3)$$

ვინაიდან ქვედა საზღვარი უცნობია და ვეძებთ a და b კოეფიციენტების საშუალებით.

რადგან ნაკადის სიჩქარის ეპიურა სწორხაზოვანია, ამიტომ ადგილი ექნება (3.3.13)-ს. ამწევი ძალის გამოსათვლელი (3.3.7) კი შემდეგნაირად ჩაიწერება:

$$C_y(a, b, \gamma) := \sum_{s=0}^q \left[p[X_s, (X_s - 1) \cdot [a \cdot (X_s)^2 + b \cdot X_s], \gamma] - p(X_s, Y_s, \gamma) \right] \quad (3.4.4)$$

ჯამური ინტეგრალური ცდომილებისათვის (3.3.15) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$I(\alpha, \beta, \gamma, a, b) := IGR1(\alpha, \beta, \gamma) + RZEDA(\alpha, \beta) + RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) \quad (3.4.5)$$

მაშასადამე, გვაქვს ამოცანა: ვიპოვოთ ოპტიმალური $fkveda(a, b)$ იმ პირობით, რომ

$$C_y(a, b, \gamma) \rightarrow \max \quad (3.4.6)$$

$$I(\alpha, \beta, \gamma, a, b) \rightarrow \min \quad (3.4.7)$$

ხოლო შემოფარგვლის პირობებს ანალოგიურად ზემოთგანხილულისა ექნებათ სახე: (3.3.18) – (3.3.21)

ცხადია, რომ როცა $C_y(a, b, \gamma)$ აღწევს მაქსიმუმს, $C_y(a, b, \gamma)^{-2}$ მიაღწევს მინიმუმს. ამიტომ (3.4.6) და (3.4.7) ექსტრემალობის პირობები შეგვიძლია გავაერთიანოთ ერთ პირობაში:

$$I(\alpha, \beta, \gamma, a, b) + C_y^{-2}(a, b, \gamma) \rightarrow \min \quad (3.4.8)$$

საბოლოოდ მიზნის ფუნქციას ექნება სახე:

$$I(\alpha, \beta, \gamma, a, b) := I(\alpha, \beta, \gamma, a, b) \cdot 10 + Cy(a, b, \gamma)^{-2} \quad (3.4.9)$$

ხოლო საოპტიმიზაციო ფუნქცია-ოპერატორი პროგრამა MathCad-ზე მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$S := \text{Minimize}(I, \alpha, \beta, \gamma, a, b)$$

პროგრამის გათვლების შედეგად ვღებულობთ

$$S = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.006 & -0.11 & 0.043 & -0.134 \\ -0.102 & 0.022 & 0.15 & -0.158 \\ 0.14 & 0.117 & 0.25 & 0.022 \\ -0.027 & 0.042 & 0.091 & 0.027 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.003 & -0.038 & 0.016 & 0.002 \\ 0.02 & 0.031 & 0.002 & -0.004 \\ -0.001 & 0.038 & 0.019 & 0.012 \\ 0.001 & 0.001 & -0.004 & 0.012 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1.001 & -1.022 & 0.043 & 0.331 \\ -0.008 & -0.165 & -0.021 & 0.243 \\ 0.05 & 0.019 & 0.036 & -0.35 \\ -0.052 & 0.016 & 0.07 & -0.332 \end{pmatrix} \\ -0.004 \\ 0.325 \end{bmatrix}$$

$$Cy(a, b, \gamma) = 2.541$$

$$a = -0.004$$

$$b = 0.325$$

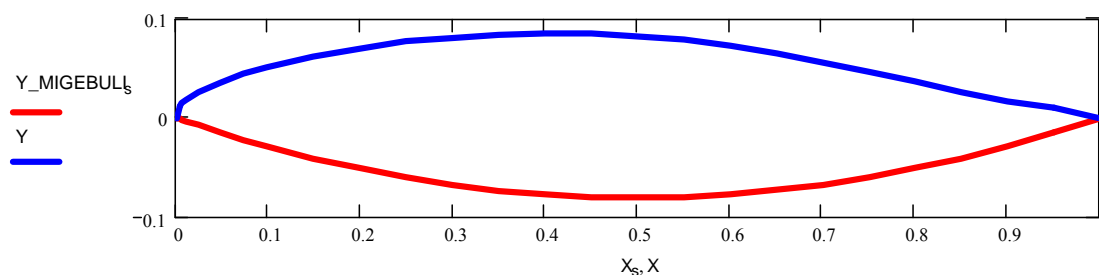
$$IGR1(\alpha, \beta, \gamma) = 0.004$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) = 0.003$$

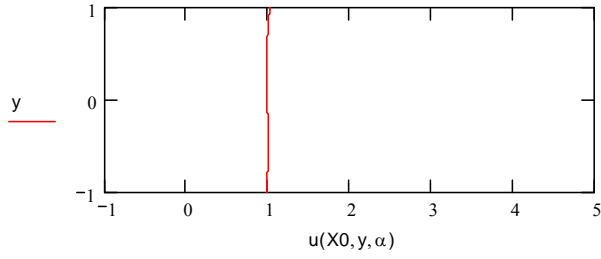
$$RZEDA(\alpha, \beta) = 0.006$$

$$I(S_0, S_1, S_2, a, b) = 0.287$$

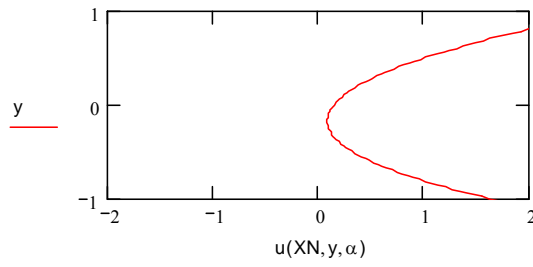
ხოლო, მიღებულ პროფილს ოპტიმიზირებული ქვედა საზღვრით აქვს სახე



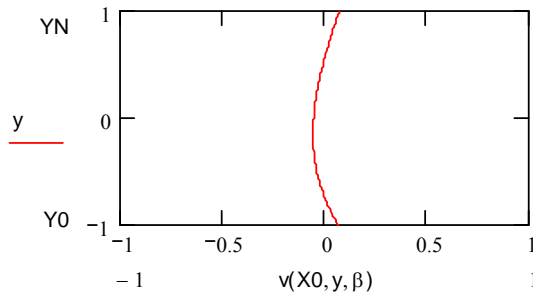
ნახ. 3.12 პროფილი მიღებული ქვედა საზღვრით სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე სიჩქარის ნაკადით გარსდენისას



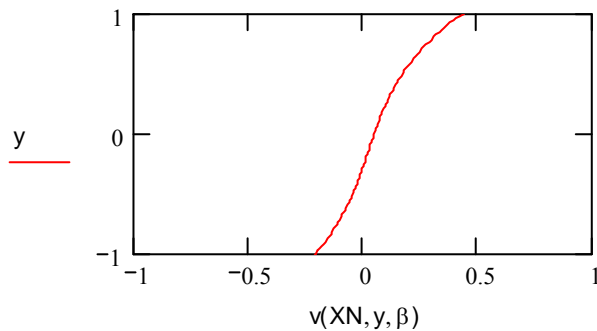
ა) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში



ბ) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

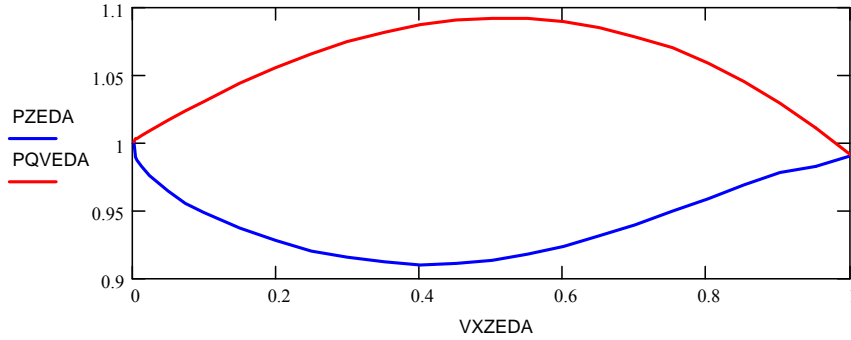


გ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში

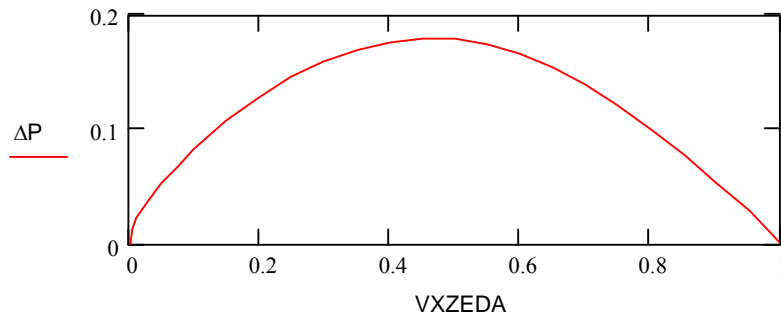


დ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში.

ნახ. 3.13 სიჩქარეთა ველის ეპიურები პროფილის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას



ნახ. 3.14 წნევათა განაწილებები პროფის ზედა და ქვედა საზღვარზე სიჩქარის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას



ნახ. 3.15 წნევათა სხვაობა პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას

3.4.2 თვითმფინავის ფრთის პროფილის ქვედა საზღვრის ოპტიმიზაცია მისი ბგერამდელი, პარაბოლური ეპიურის მქონე სიჩქარის ნაკადით გარსდენისას

ახლა განვიხილოთ თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ქვედა საზღვრის ოპტიმიზაციის ამოცანა პარაბოლური ეპიურის მქონე სიჩქარის ნაკადით გარსდენისას. ალგორითმი ანალოგიურია, იმ განსხვავებით, რომ ნაკადის ეპიურის პარაბოლურობის გამო (3.3.13)-ის ნაცვლად ადგილი ექნება (3.3.24).

გათვლების შედეგად ვღებულობთ:

$$S = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0.009 & -0.158 & 0.04 & -0.131 \\ -0.091 & -0.02 & 0.171 & -0.162 \\ 0.132 & 0.118 & 0.014 & 0.107 \\ -0.042 & 0.042 & 0.107 & 0.077 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.003 & -0.038 & 0.016 & 0.002 \\ 0.021 & 0.032 & 0.002 & -0.004 \\ 0.009 & 0.038 & 0.025 & 0.012 \\ -0.003 & 0.003 & -0.005 & 0.012 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1.001 & -0.983 & 0.043 & 0.331 \\ -0.008 & -0.145 & -0.021 & 0.243 \\ 0.05 & 0.03 & 0.036 & -0.35 \\ -0.044 & 0.016 & 0.101 & -0.332 \end{pmatrix} \\ -0.004 \\ 0.27 \end{bmatrix}$$

$$Cy(a, b, \gamma) = 2.226$$

$$a = -0.004$$

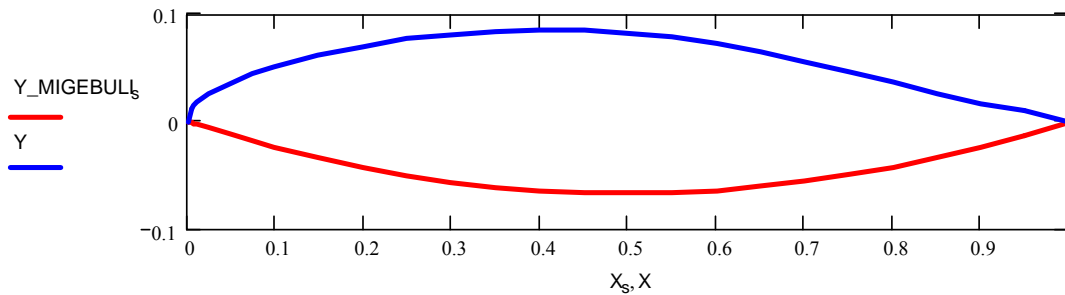
$$b = 0.27$$

$$IGR1(\alpha, \beta, \gamma) = 0.017$$

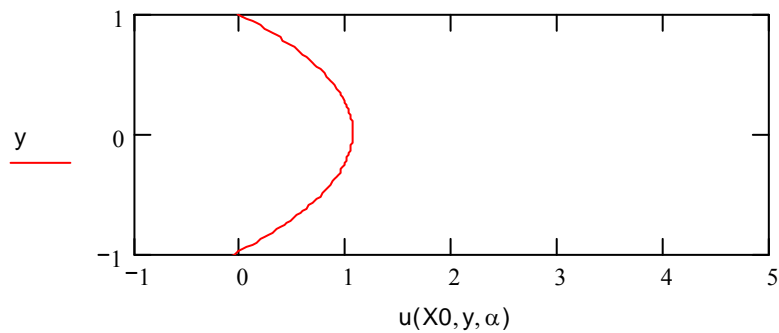
$$RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) = 0.004$$

$$RZEDA(\alpha, \beta) = 0.008$$

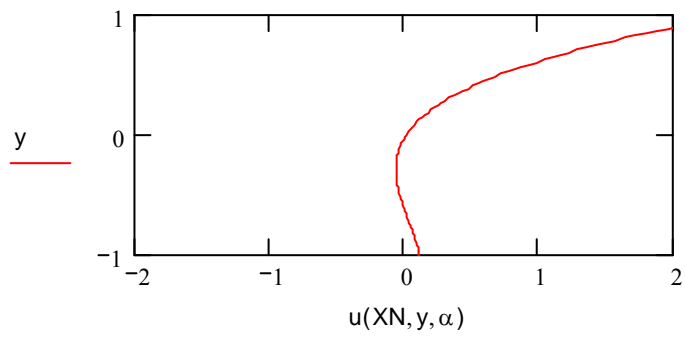
$$I(S_0, S_1, S_2, a, b) = 0.494$$



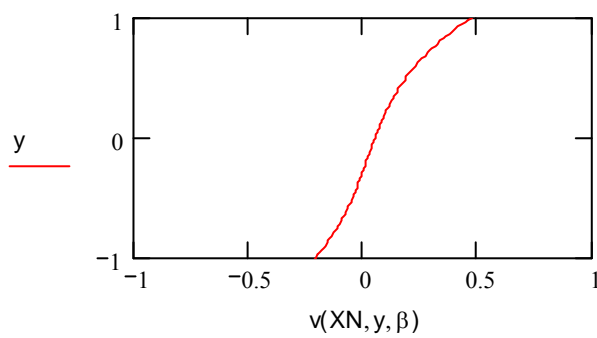
ნახ. 3.16 პროფილი მიღებული ქვედა საზღვრით პარაბოლური სიჩქარის ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას



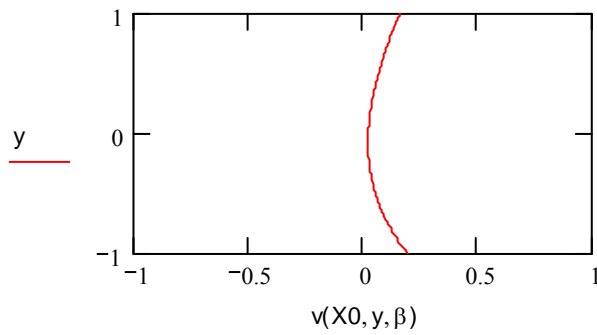
ა) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში



ბ) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

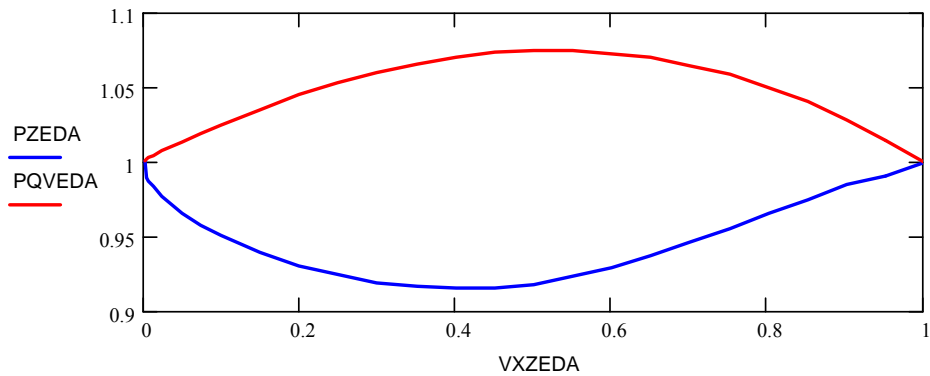


გ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

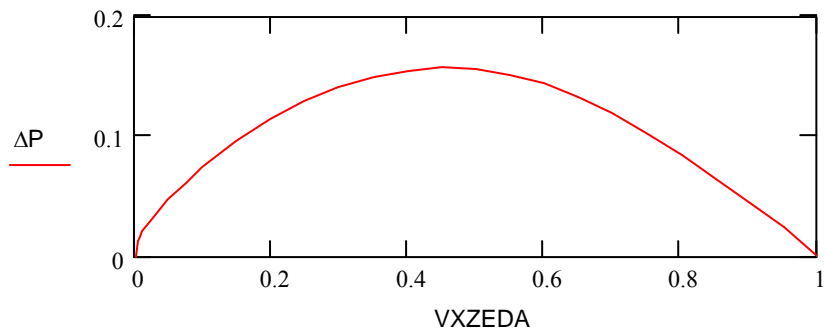


დ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში

ნახ.3.17 სიჩქარეთა ველის ეპიურები პროფილის პარაბოლური ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას



ნახ. 3.18 წნევათა განაწილებები პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე სიჩქარის პარაბოლური ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას



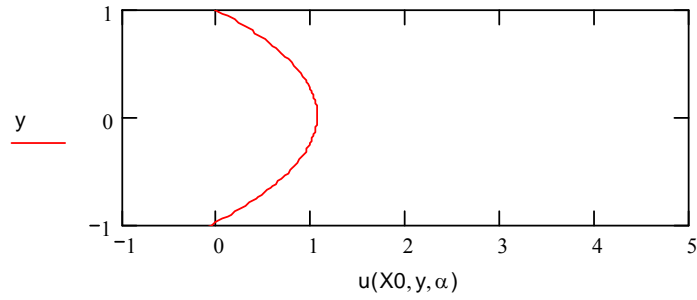
ნახ. 3.19 წნევათა სხვაობა პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის

3.4.3 ოპტიმიზაციის შედეგად მიღებული პროფილის ბლანტი სითხით გარსდენის ამოცანის გათვლა

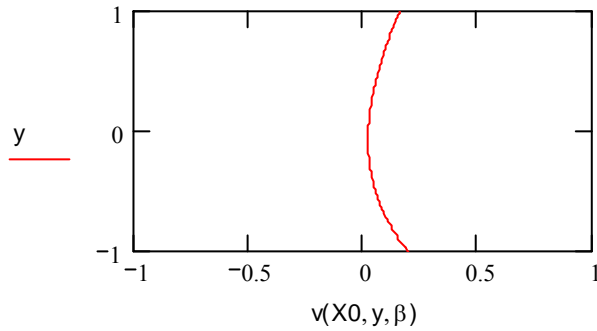
ახლა განვიხილოთ 3.4.1 პარაგრაფში მიღებული პროფილის გათვლა 3.3.1 და 3.3.2 პარაგრაფში განხილული ალგორითმების მიხედვით ანუ, როგორც პარაბოლური, ასევე სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე სიჩქარის ნაკადით გარსდენისას .

პარაბოლური ეპიურის მქონე სიჩქარის გარსდენისას გათვლების შედეგად ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} \text{IGR1}(\alpha, \beta, \gamma) &= 0.003 \\ \text{I}(\alpha, \beta, \gamma) &= 0.01 \\ \text{Cy}(\gamma) &= 0.122 \\ \text{RZEDA}(\alpha, \beta) &= 0.004 \\ \text{RKVEDA}(\alpha, \beta) &= 0.003 \end{aligned}$$

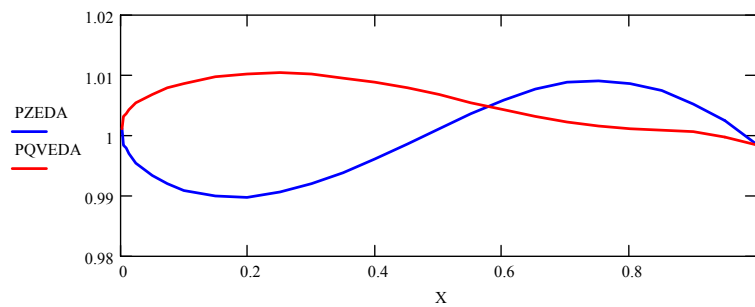


ა) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში

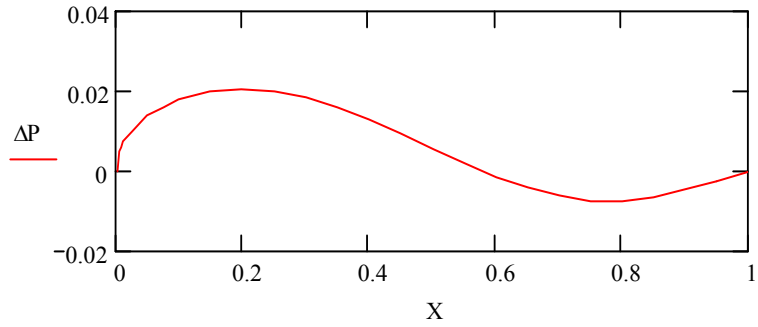


ბ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში

ნახ.3.20 სიჩქარეთა ველის ეპიურები პროფილის პარაბოლური ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას



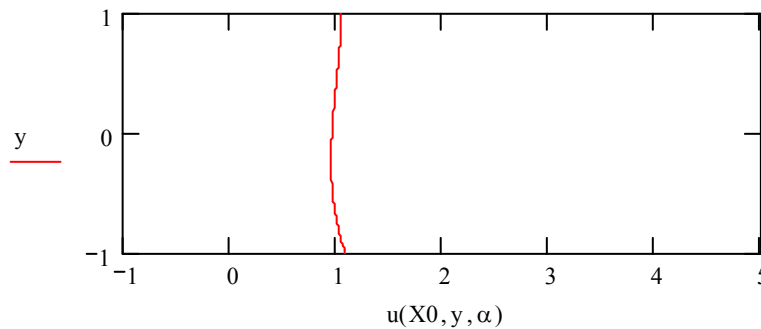
ნახ. 3.21 წნევათა განაწილებები პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე სიჩქარის პარაბოლური ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას



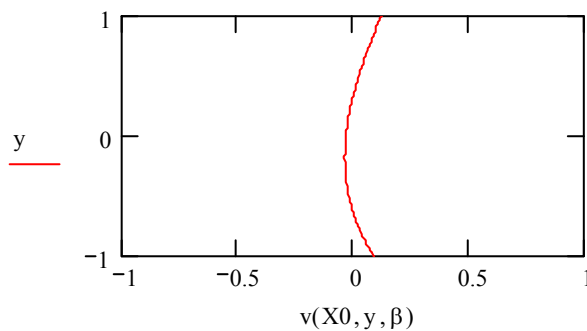
ნახ.3.22 წნევათა სხვაობა პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის სიჩქარის პარაბოლური ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას

სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე სიჩქარის გარსდენისას გათვლების შედეგად ვღებულობთ:

$$\begin{aligned} \text{IGR}(\alpha, \beta, \gamma) &= 0.007 \\ I(\alpha, \beta, \gamma) &= 0.017 \\ C\gamma(\gamma) &= 0.122 \\ \text{RZEDA}(\alpha, \beta) &= 0.006 \\ \text{RKVEDA}(\alpha, \beta) &= 0.004 \end{aligned}$$

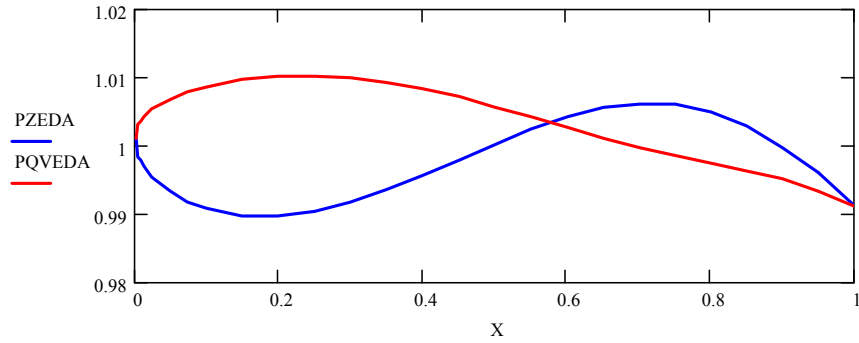


ა) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში

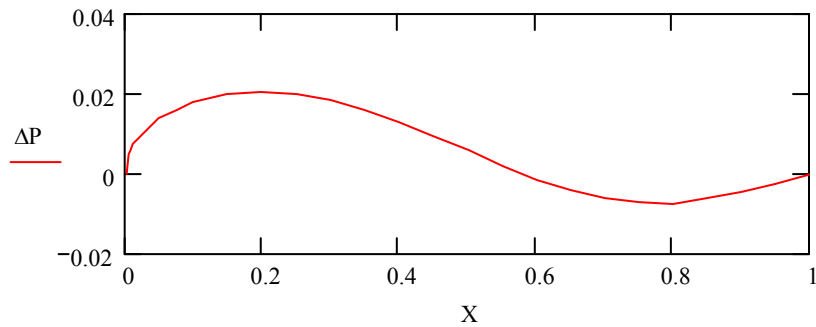


ბ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში

ნახ.3.23 სიჩქარეთა ველის ეპიურები პროფილის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას



ნახ. 3.24 წნევათა განაწილებები პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე სიჩქარის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას



ნახ. 3.25 წნევათა სხვაობა პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის სწორხაზოვანი ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას

3.5 შემხვედრი ნაკადის სიჩქარის ეპიურის ფორმის გავლენა პროფილის გარსდენის სურათზე

მოვახდინოთ წინა პარაგრაფების შედეგების ანალიზი და ვნახოთ თუ რა გავლენას ახდენს შემხვედრი ნაკადის სიჩქარის ეპიურის ფორმა პროფილის გარსდენის სურათზე [42]. ანალიზის სიმარტივისათვის მიღებული შედეგები გადავიტანოთ ცხრილში:

ექსპერიმენტული პროფილი	სწორხაზოვანი სიჩქარეთა ეპიურის მქონე ნაკადი	Cy	I	IGR1	RZEDA	RKVEDA
		0.157	0.011	0.004	0.004	0.003
მიღებული პროფილი	პარაბოლური სიჩქარეთა ეპიურის მქონე ნაკადი	0.156	0.012	0.004	0.005	0.003
	სწორხაზოვანი სიჩქარეთა ეპიურის მქონე ნაკადი	0.122	0.017	0.007	0.006	0.004
	პარაბოლური სიჩქარეთა ეპიურის მქონე ნაკადი	0.122	0.01	0.003	0.004	0.003

ცხრილი 1. გარსდენის რეჟიმზე სიჩქარეთა ეპიურის ფორმის გავლენის ანალიზი

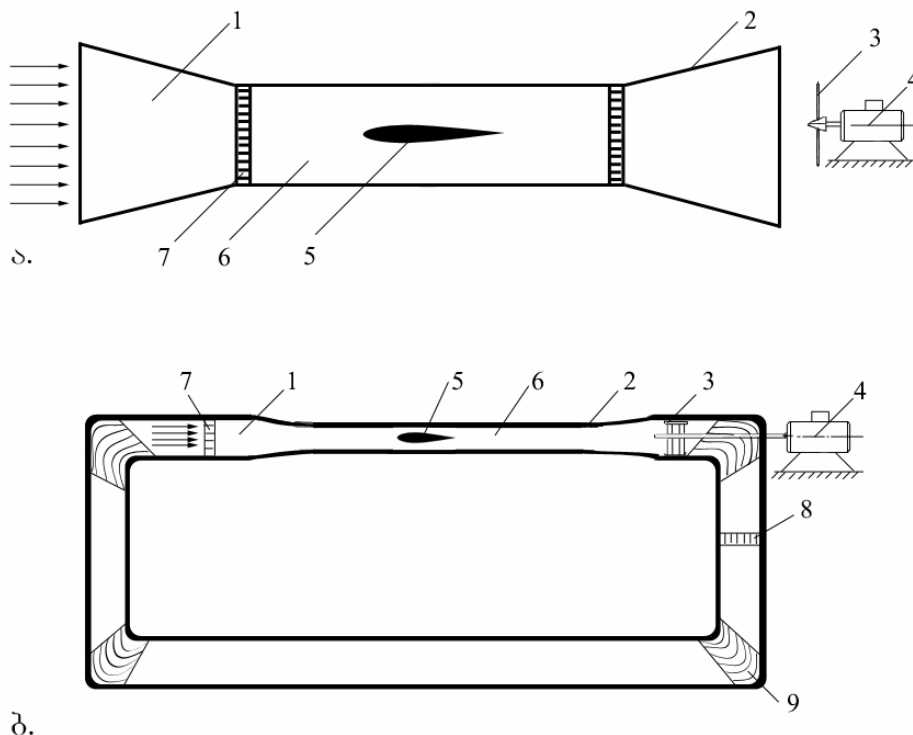
ამგვარად, როგორც ცხრილიდან ჩანს, I, IGR1, RZEDA, RKVEDA, Cy-ის მნიშვნელობები მიღებული მნიშვნელობები, როგორც სწორხაზოვანი, ასევე, პარაბოლური სიჩქარის ნაკადით გარსდინებისას უმნიშვნელოდ განსხვავდებიან ერთმანეთისგან, ამიტომ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ სიჩქარეთა ეპიურის ფორმა, მნიშვნელოვნად მცირედ მოქმედებს გარსდენის სურათზე.

თავი 4. ექსპერიმენტული ოპტიმალური პროფილების თეორიული მოდელირება

შესავალი (ექსპერიმენტის ტექნიკა)

ფრთის აეროდინამიკური მახასიათებლების გათვლა ხდება ექსპერიმენტების საფუძველზე. აეროდინამიკური ექსპერიმენტის საფუძველია ე.წ. მოძრაობის შექცევადობის პრინციპი, რომელიც დამყარებულია კლასიკური მექანიკის ფარდობითობის პრინციპზე. აეროდინამიკური ექსპერიმენტების დროს დაცული უნდა იყოს მოდელსა და ნატურს შორის მსგავსების კრიტერიუმების ტოლობა.

აეროდინამიკური ექსპერიმენტებისთვის გამოყენებულია აეროდინამიკური მილები, "მფრინავი ლაბორატორიები" – სპეციალურად მოწყობილი თვითმფრინავები და სხვა [1].



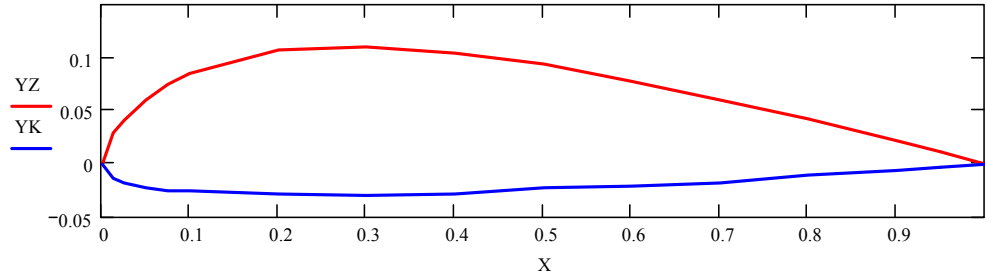
ნახ. 4.1 პირდაპირმოქმედი (ა) და შუკრული (ბ) ტიპის ბგერამდელი
აეროდინამიკური მილები

აეროდინამიკური მილი წარმოადგენს ისეთ დანადგარს, რომლის მიერ შექმნილ ჰაერის ნაკადში წარმოებს აეროდინამიკური ექსპერიმენტები. განასხვავებენ ძირითადად ბგერამდელ და ზებგერით აეროდინამიკურ მილებს. ბგერამდელი აეროდინამიკური მილი შეიძლება იყოს პირდაპირმოქმედი (ნახ.4.1.ა) და შეკრული (ნახ.4.1.ბ) ტიპის. პირდაპირმოქმედ აეროდინამიკურ მილში ვენტილიატორი (3), რომელიც ძრავის (4) საშუალებით ბრუნავს შეისრუტავს ჰაერს მილში და წარმართავს ნაკადს მუშა ნაწილში, სადაც დაყენებულია გამოსაცდელი მოდელი. პირდაპირმოქმედი აეროდინამიკური მილი სიმარტივით ხასიათდება. შეკრულ მილში შემავალი და გასავალი ნაწილები ერთმანეთთანაა შეერთებული. ასეთი მილები უფრო ეკონომიურია. მუშა ნაწილის წინ ჰაერის ნაკადის გასწორებისთვის დაყენებულია გისოსი (7), შევიწროვებადი საქშენი (1) გამიზნულია მოცემული სიჩქარის ნაკადის მისაღებად. გაფართოებადი დიფუზორი (2) ამცირებს სიჩქარეს და ზრდის ჰაერის წნევას. რადიატორი (8) ჰაერის ტემპერატურის მუდმივობას უზრუნველყოფს. მიმმართველი ფრთები (9) ამცირებენ ჰაერის ენერჯიის კარგვას, ხელს უშლიან გრიგალების წარმოქმნას ნაკადის აეროდინამიკური ექსპერიმენტები ხანგრძლივი, შრომატევადი და ძვირადღირებული პროცესია. თითო ექსპერიმენტის ჩატარება საკმაოდ დიდ ხარჯებთან არის დაკავშირებული. ამიტომ ჩვენი მეთოდი საშუალებას იძლევა უფრო იოლი გზით ზედმეტი ხარჯების გარეშე და მოკლე დროში გავთვალოთ ოპტიმალური პროფილი.

მოვახდინოთ, რამდენიმე ექსპერიმენტული პროფილის გათვლა [46].

4.1 ЦАГИ 846 -14 ექსპერიმენტული პროფილის გათვლა

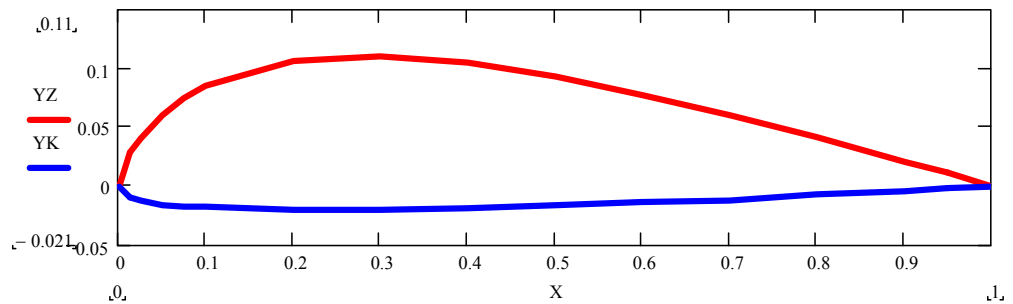
მოცემულია ЦАГИ 846 -14 ექსპერიმენტული პროფილი :



ნახ. 4.2 ЦАГИ 846 -14 ექსპერიმენტული პროფილი

ვინაიდან დავადგინეთ, რომ ნაკადის სიჩქარეთა ეპიურა გარსდენის სურათზე უმნიშვნელო გავლენას ახდენს, ამიტომ მოცემული ზედა საზღვრით ვიპოვოთ უცნობი ქვედა საზღვარი, შემდეგ მოვახდინოთ მათი გათვლა (3.3.1) ალგორითმით და შევადაროთ შედეგები.

მიღებულ პროფილს აქვს სახე :



ნახ.4.3 ЦАГИ 846 -14 მიღებული პროფილი

მოვიყვანოთ ЦАГИ846-14 ექსპერიმენტული პროფილის გათვლების შედეგები:

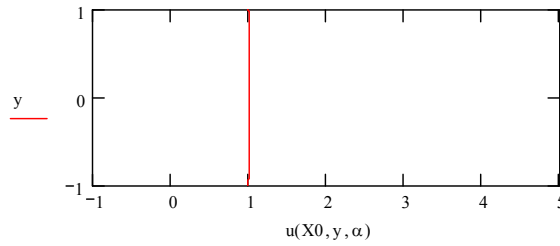
$$IGR(\alpha, \beta, \gamma) = 2.5 \times 10^{-5}$$

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = 2.9441 \times 10^{-4}$$

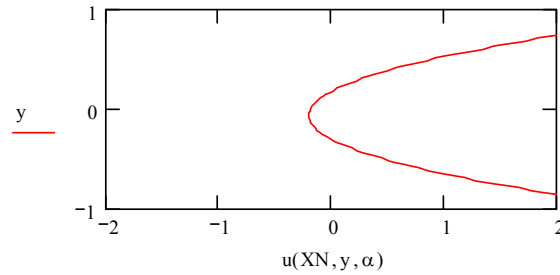
$$C_y(\gamma) = 0.112$$

$$RZEDA(\alpha, \beta) = 1.52 \times 10^{-4}$$

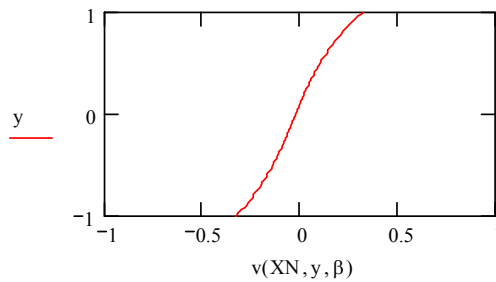
$$RKVEDA(\alpha, \beta) = 1.174 \times 10^{-4}$$



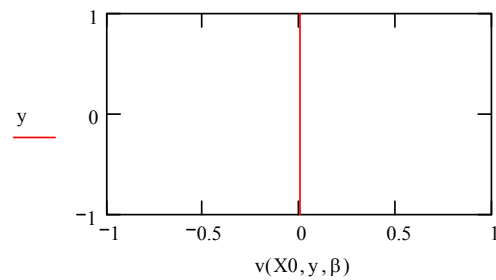
ა) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში



ბ) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

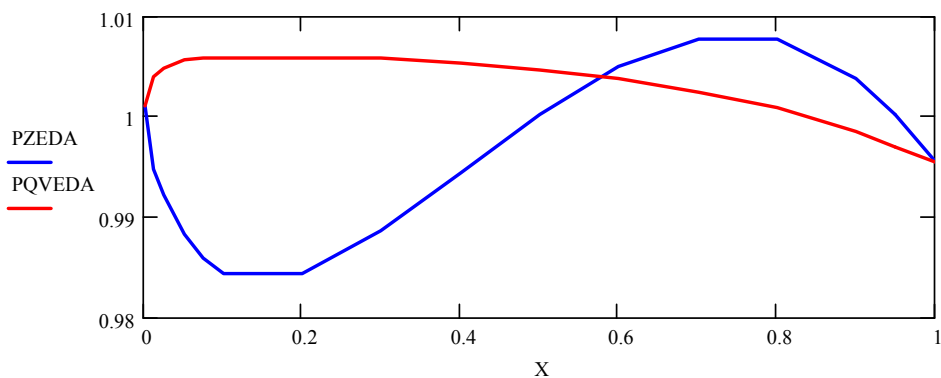


გ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

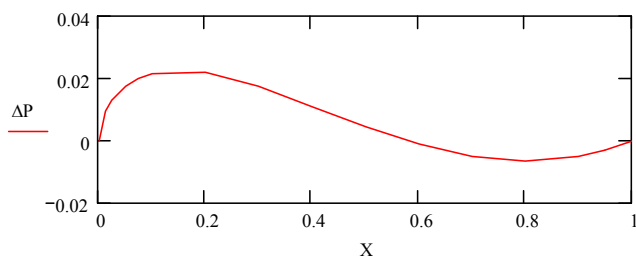


დ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში

ნახ. 4.4 ЦАГИ 846 -14 ექსპერიმენტული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები



ნახ. 4.5 წნევათა განაწილებები ЦАГИ 846 -14 ექსპერიმენტული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე



ნახ. 4.6 წნევათა სხვაობა ЦАГИ 846 -14 ექსპერიმენტული პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის

ЦАГИ 846 -14 მიღებული პროფილის გათვლების შედეგები:

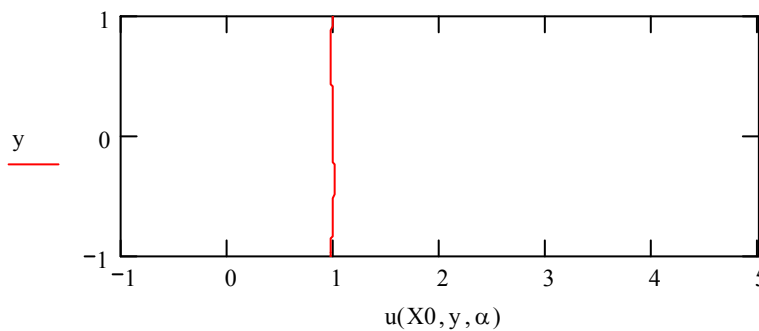
$$\text{IGR}(\alpha, \beta, \gamma) = 0.004$$

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = 0.0102$$

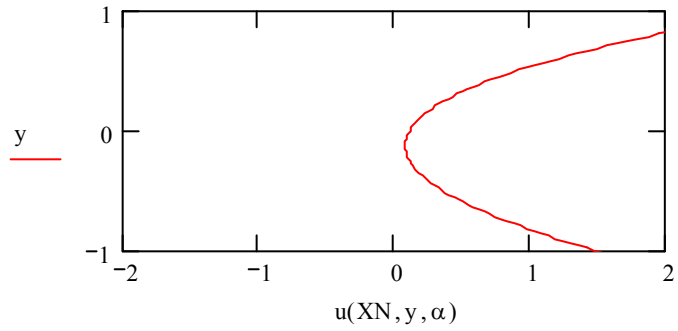
$$C\gamma(\gamma) = 0.112$$

$$\text{RZEDA}(\alpha, \beta) = 0.003$$

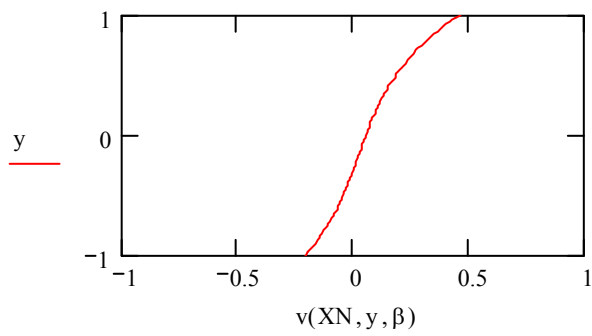
$$\text{RKVEDA}(\alpha, \beta) = 0.003$$



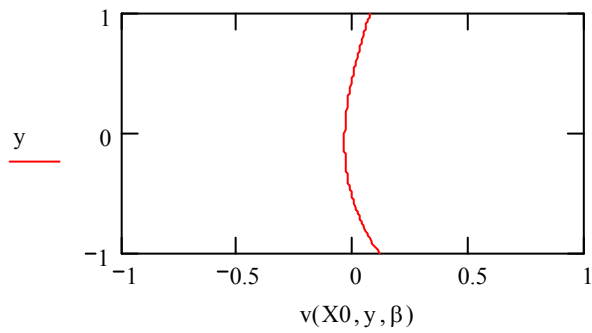
ა) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში



ბ) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

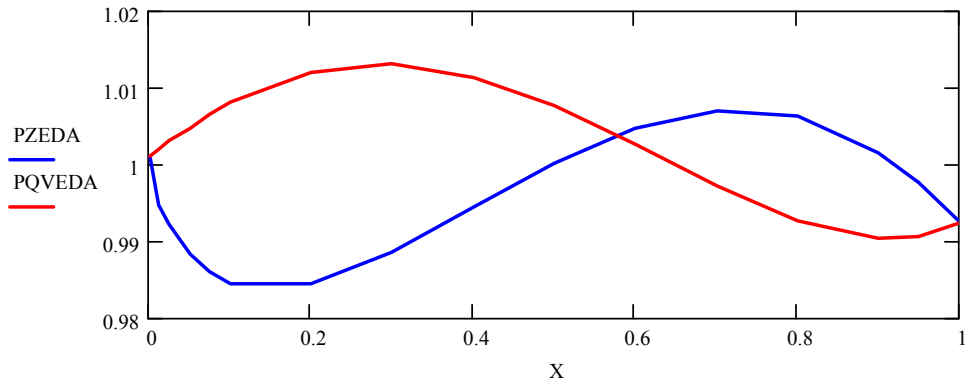


გ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

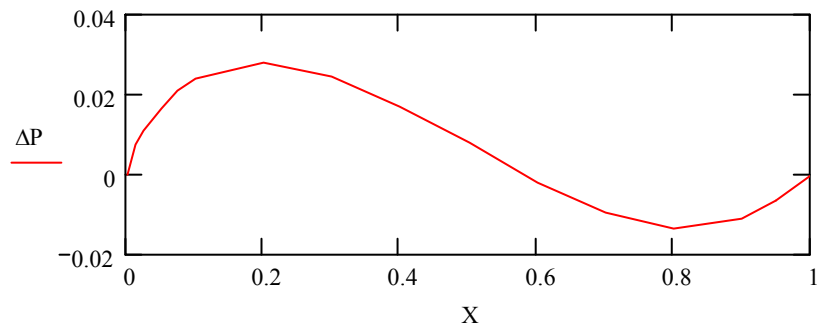


დ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში

ნახ.4.7 ЦАГИ 846 -14 მიღებული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები



ნახ.4.8 წნევათა განაწილებები ЦАГИ 846-14 მიღებული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე



ნახ. 4.9 წნევათა სხვაობა ЦАГИ 846 -14 მიღებული პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის

ანალიზისთვის შედეგები გადავიტანოთ ცხრილში:

	Cy	I	IGR1	RZEDA	RKVEDA
ექსპერიმენტული	0,112	0,0102	0.004	0,003	0,003
მიღებული	0,112	0,0002	0,000025	0.00015	0.00011

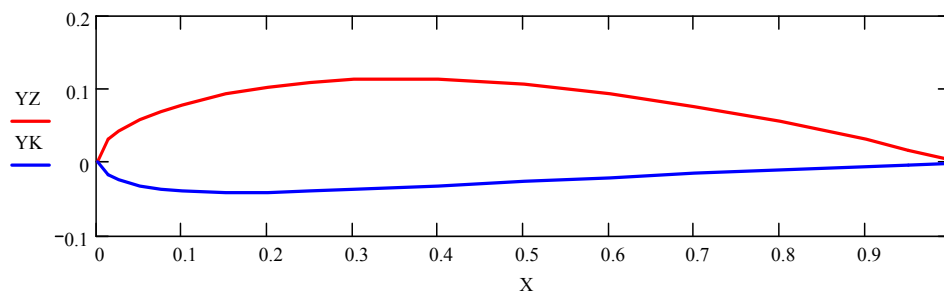
ცხრილი 2. ЦАГИ 846 -14 პროფილის გარსდენის სურათის ანალიზი

ამრიგად, შეგვიძლია დავსკვნათ, რომ ექსპერიმენტული ოპტიმალური პროფილის შესაბამისი C_y ემთხვევა თეორიულად გამოთვლილი ოპტიმალური პროფილის C_y -ს, რაც იმას ნიშნავს რომ ჩვენი პროგრამა სწორად მუშაობს. ქვედა საზღვრის ოპტიმალური პროფილი გვიჩვენებს, რომ მოცემული ზედა საზღვრის პირობებში მიღებული ქვედა საზღვრის კონტურის კოორდინატების ცდომილება ექსპერიმენტულთან შედარებით 8%-ია, რაც არ აღემატება დასაშვებ ზღვარს.

ახლა მოვახდინოთ ამონახსნის გამოკვლევა მდგრადობაზე ამწევი ძალის C_y კოეფიციენტის მიმართ. ამისთვის როგორც ექსპერიმენტული, ასევე მიღებული პროფილების ქვედა კონტურებს მივანიჭოთ მცირე შეშფოთება $\Delta = 5\%$ -იანი ნაზრდი, რაც დასაშვებია პროფილის რეალური დამზადების პირობებში და გამოვიკვლიოთ, თუ რა გავლენას მოახდენს ეს შეშფოთება C_y კოეფიციენტის მნიშვნელობაზე. გამოთვლების შედეგებმა გვიჩვენა, რომ შეშფოთების შედეგად ექსპერიმენტული პროფილისთვის $C_y = 0.111$, ნაცვლად 0,112, ანუ ცდომილება 0,1%-ია, ხოლო მიღებული პროფილისთვის $C_y = 0.11$, ნაცვლად 0,112-ისა, ანუ 0,2%. ვინაიდან ცდომილება ორივე შემთხვევაში მცირეა და დასაშვებ ზღვარს არ აღემატება, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ამონახსნი მდგრადია.

4.2 NACA 4415 ექსპერიმენტული პროფილის გათვლა

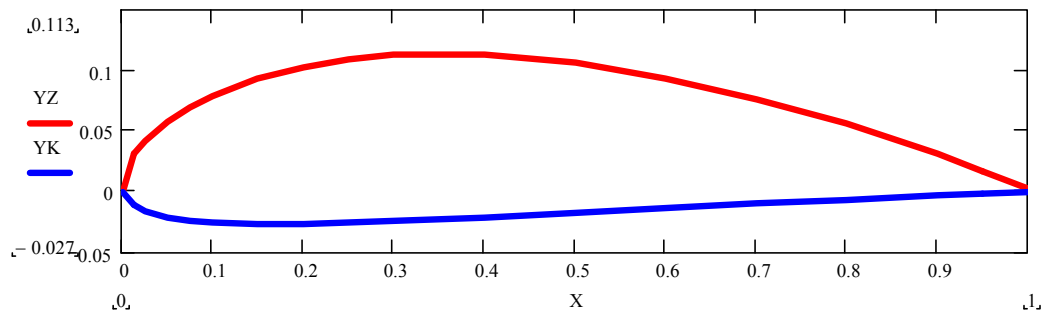
მოცემულია NACA 4415 ექსპერიმენტული პროფილი (ნახ.4.10)



ნახ. 4.10 NACA 4415 ექსპერიმენტული პროფილი

ჩავატაროთ გათვლები ანალოგიურად ზემოაღწერილისა.

NACA 4415 მიღებულ პროფილს აქვს სახე :



ნახ.4.11 NACA 4415 მიღებული პროფილი

NACA 4415 ექსპერიმენტული პროფილის გათვლების შედეგები:

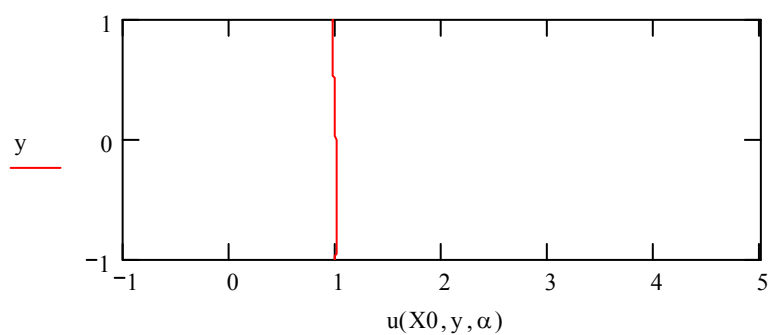
$$IGR(\alpha, \beta, \gamma) = 0.004$$

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = 0.0133$$

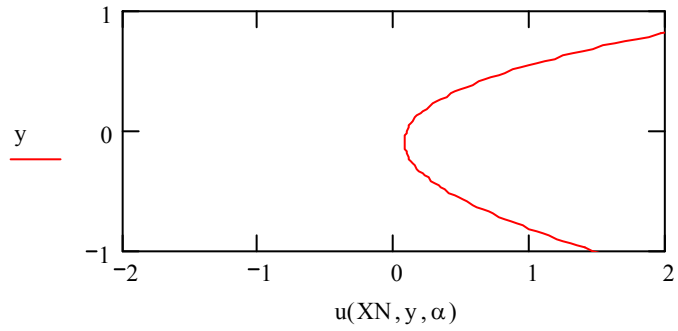
$$C_y(\gamma) = 0.161$$

$$RZEDA(\alpha, \beta) = 0.006$$

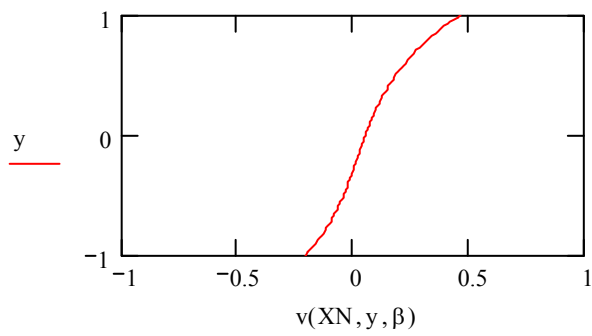
$$RKVEDA(\alpha, \beta) = 0.003$$



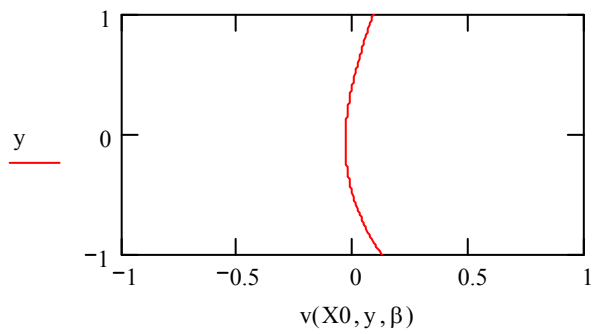
ა) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში



ბ) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

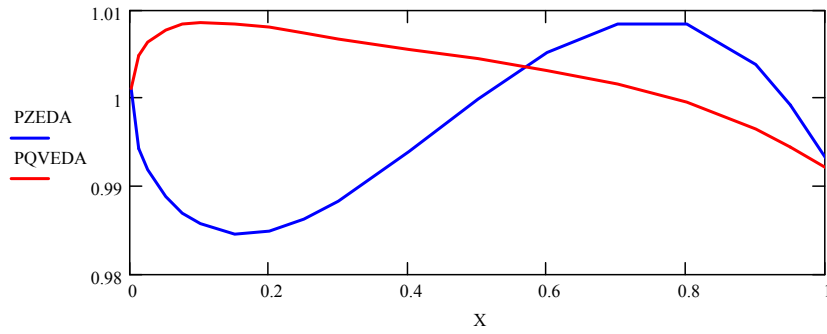


გ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

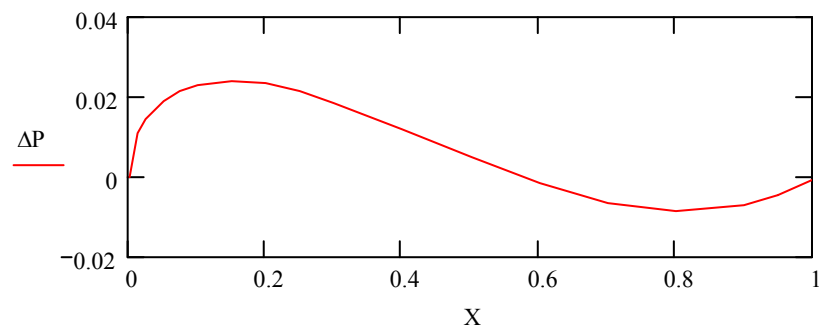


დ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში

ნახ. 4.12 NACA 4415 ექსპერიმენტული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები



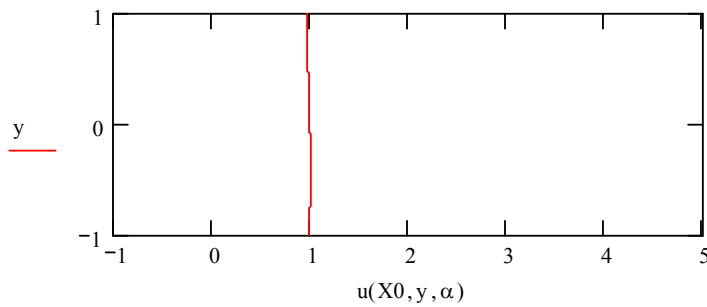
ნახ.4.13 წნევათა განაწილებები NACA 4415 ექსპერიმენტული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე



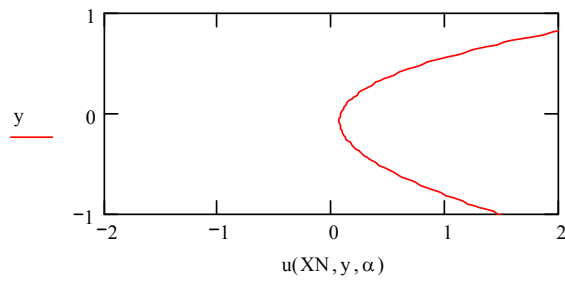
ნახ.4.14 წნევათა სხვაობა NACA 4415 ექსპერიმენტული პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის

NACA 4415 მიღებული პროფილის გათვლების შედეგები:

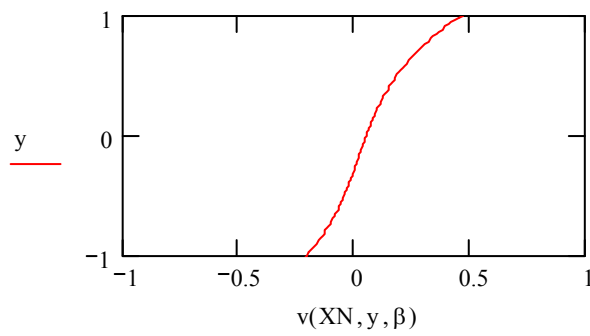
- $IGR1(\alpha, \beta, \gamma) = 0.004$
- $I(\alpha, \beta, \gamma) = 0.0138$
- $Cy(\gamma) = 0.106$
- $RZEDA(\alpha, \beta) = 0.006$
- $RKVEDA(\alpha, \beta) = 0.004$



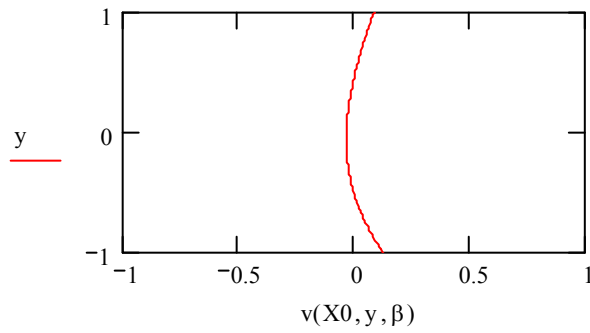
ა) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში



ბ) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

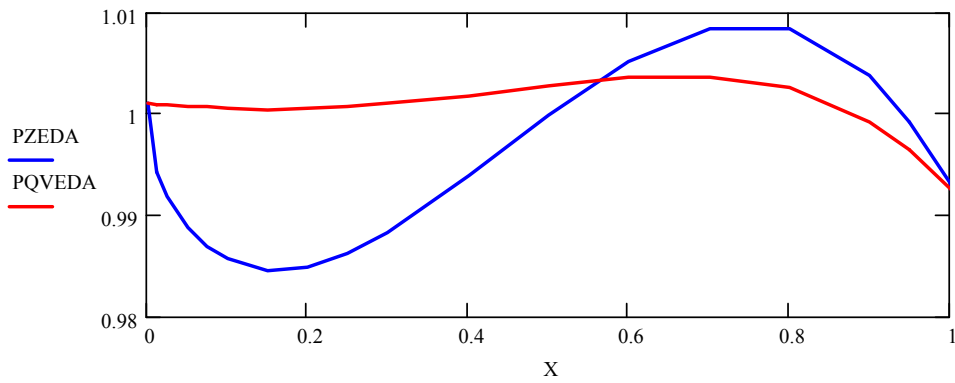


გ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

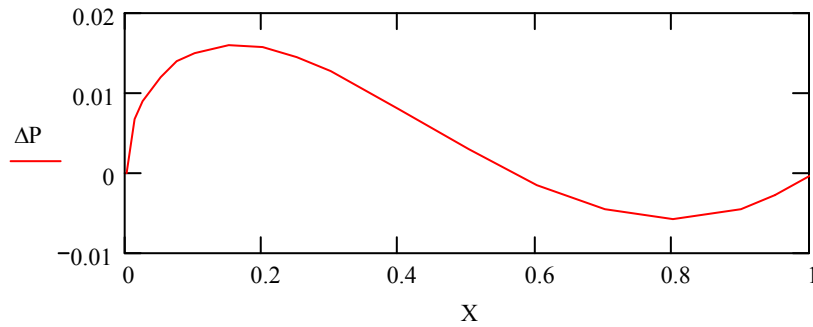


დ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში

ნახ. 4.15 NACA 4415 მიღებული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარე-
თა ველის ეპიურები



ნახ. 4.16 წნევათა განაწილებები NACA 4415 მიღებული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე



ნახ. 4.17 წნევათა სხვაობა NACA 4415 მიღებული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე

ანალიზისთვის შედეგები გადავიტანოთ ცხრილში:

	Cy	I	IGR1	RZEDA	RKVEDA
ექსპერიმენტული	0,161	0,0133	0,004	0,006	0,003
მიღებული	0,106	0,0138	0,004	0,006	0,004

ცხრილი 3. NACA 4415 პროფილის გარსდენის სურათის ანალიზი

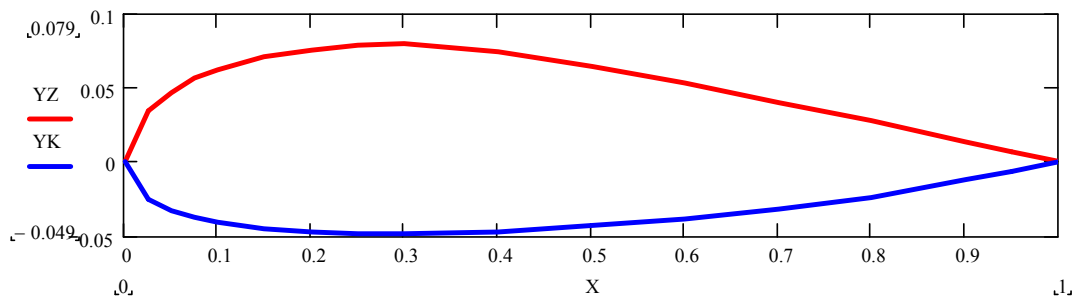
ამრიგად, შეგვიძლია დავსაკვნათ, რომ ცდომილება არის 6%. რაც დასაშვებ ფარგლებშია. ქვედა საზღვრის ოპტიმალური პროფილი გვიჩვენებს,

რომ მოცემული ზედა საზღვრის პირობებში მიღებული ქვედა საზღვრის კონტურის კოორდინატების ცდომილება ექსპერიმენტულთან შედარებით 6%-ია, რაც არ აღემატება დასაშვებ ზღვარს.

ანალოგიურად ზემოაღნიშნულისა მოვახდინეთ ამონახსნის მდგრადობაზე გამოკვლევა აშწევი ძალის C_y კოეფიციენტის მიმართ. გამოთვლების შედეგებმა გვიჩვენა, რომ შეშფოთების შედეგად ექსპერიმენტული პროფილისთვის $C_y = 0.158$, ნაცვლად 0,161-ისა, ანუ ცდომილება 0,3%-ია, ხოლო მიღებული პროფილისთვის $C_y = 0.106$, იგივე, რაც შეშფოთებამდე. აქ პრაქტიკულად ცდომილება 0-ის ტოლია. ამ შემთხვევაშიც ამონახსნი მდგრადია.

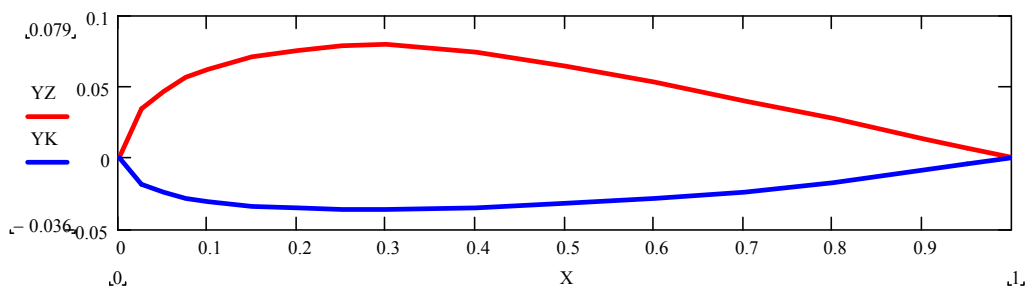
4.3 ME163 ექსპერიმენტული პროფილის გათვლა

მოცემულია ME163 ექსპერიმენტული პროფილი:



ნახ.4.18 ME163 ექსპერიმენტული პროფილი

ME163 მიღებულ პროფილს აქვს სახე :



ნახ. 4.19 ME163 მიღებული პროფილი

ME163 ექსპერიმენტული პროფილის გათვლების შედეგები:

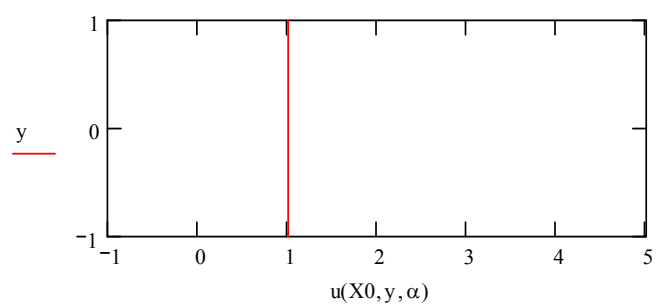
$$\text{IGR}(\alpha, \beta, \gamma) = 4.048 \times 10^{-5}$$

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = 4.681 \times 10^{-4}$$

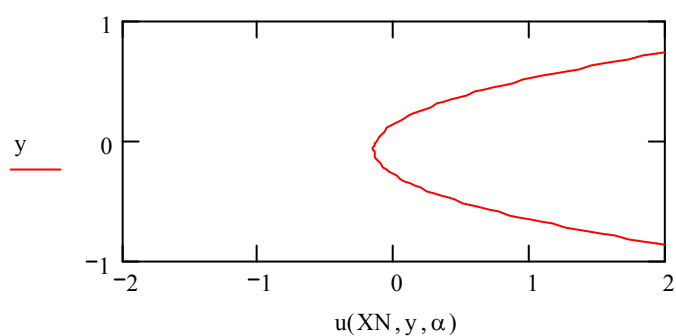
$$C_y(\gamma) = 0.138$$

$$\text{RZEDA}(\alpha, \beta) = 2.628 \times 10^{-4}$$

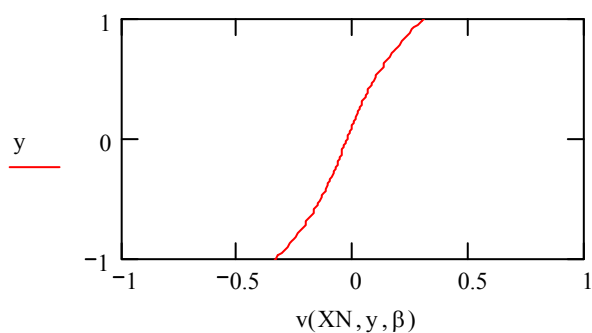
$$\text{RKVEDA}(\alpha, \beta) = 1.647 \times 10^{-4}$$



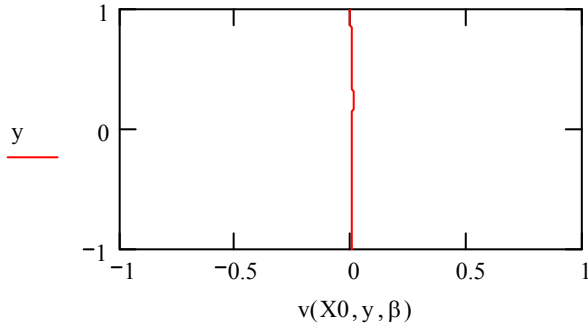
ა) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში



ბ) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

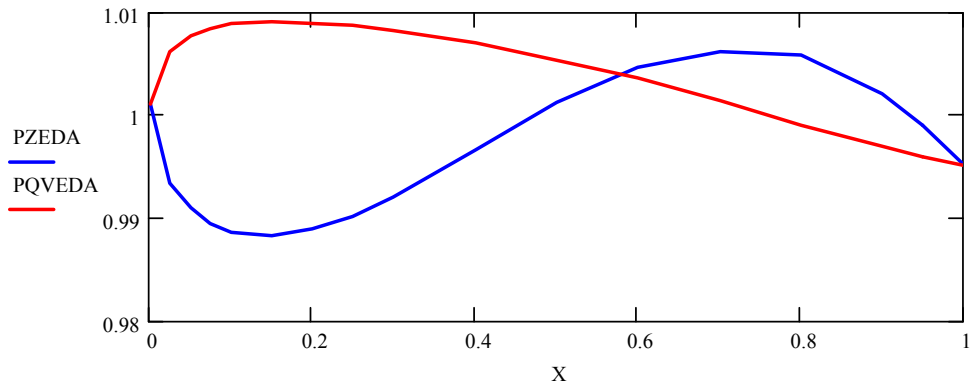


გ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

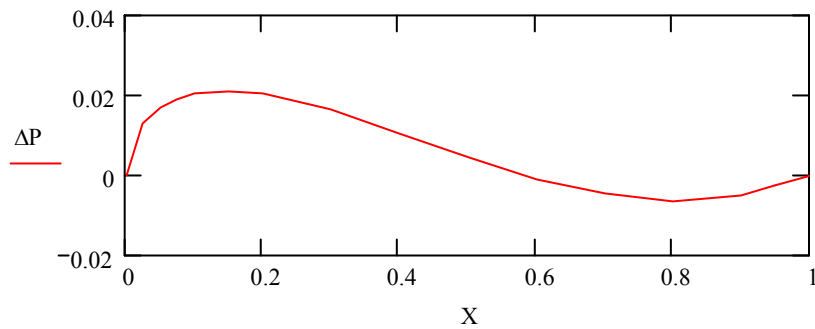


დ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში

ნახ.4.20 ME163 ექსპერიმენტული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები



ნახ.4.21 წნევათა განაწილებები ME163 ექსპერიმენტული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე



ნახ.4.22 წნევათა სხვაობა ME163 ექსპერიმენტული პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის სწორხაზოვანი

ME163 მიღებული პროფილის გათვლების შედეგები:

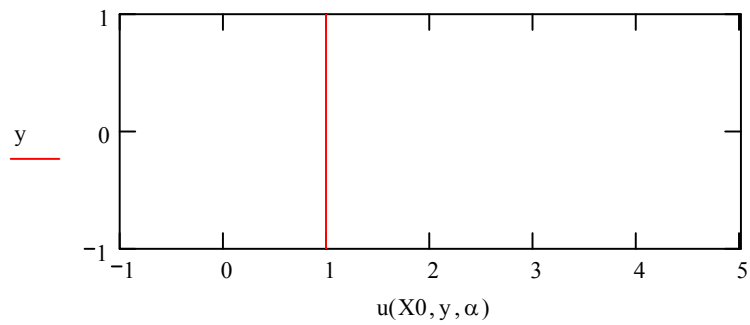
$$\text{IGR1}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

$$\text{I}(\alpha, \beta, \gamma) = 0.001$$

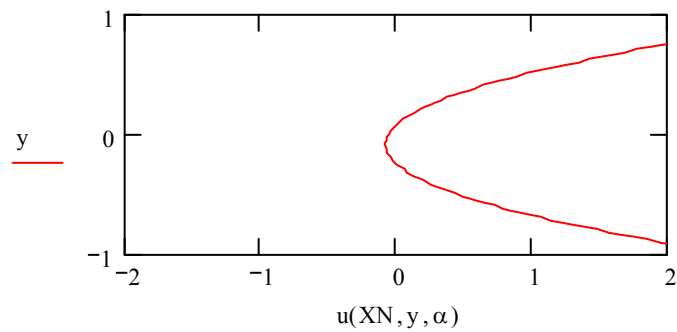
$$\text{Cy}(\gamma) = 0.127$$

$$\text{RZEDA}(\alpha, \beta) = 7.451 \times 10^{-4}$$

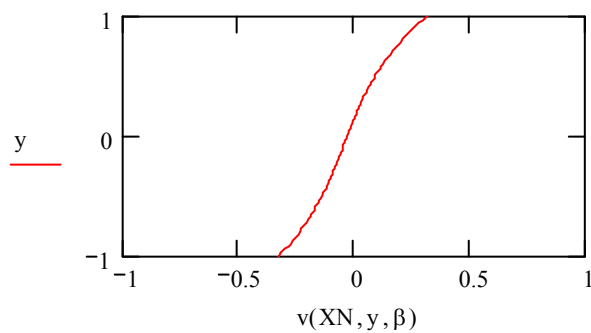
$$\text{RKVEDA}(\alpha, \beta) = 3.136 \times 10^{-4}$$



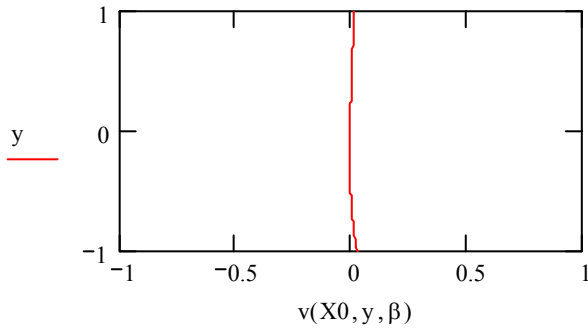
ა) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში



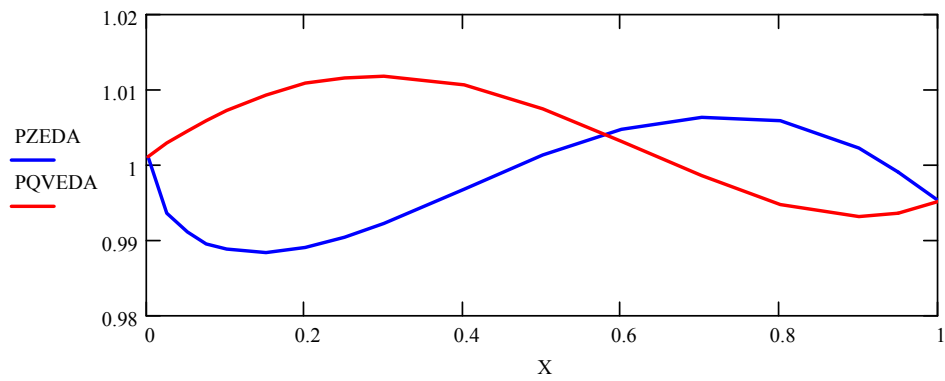
ბ) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში



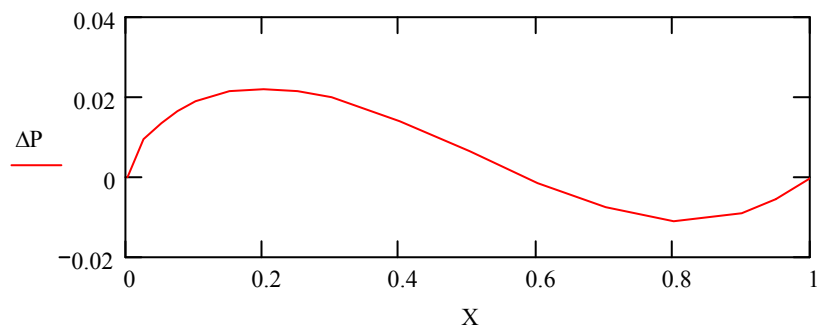
გ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში



დ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში
 ნახ.4.24.. ME163 მიღებული პროფილის გარსდენილი ნაკადის
 სიჩქარეთა ველის ეპიურები



ნახ. 4.25 წნევათა განაწილებები ME163 მიღებული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე



ნახ.4.26 წნევათა სხვაობა ME163 მიღებული პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს შორის

ანალიზისთვის შედეგები გადავიტანოთ ცხრილში:

	Cy	I	IGR1	RZEDA	RKVEDA
ექსპერიმენტული	0.138	0.0004	0.00004	0.0002	0.00016
მიღებული	0,127	0,001	0	0.00074	0.00031

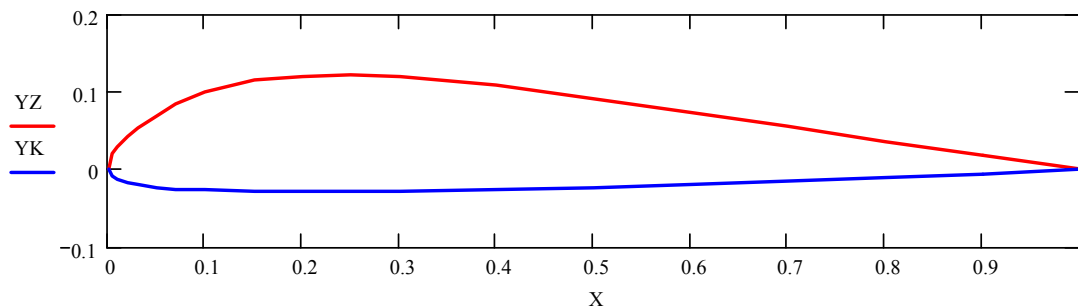
ცხრილი 4. ME163 პროფილის გარსდენის სურათის ანალიზი

ამრიგად, შეგვიძლია დავსაკვნათ, რომ ცდომილება არის 6%. რაც დასაშვებ ფარგლებშია. ქვედა საზღვრის ოპტიმალური პროფილი გვიჩვენებს, რომ მოცემული ზედა საზღვრის პირობებში მიღებული ქვედა საზღვრის კონტურის კოორდინატების ცდომილება ექსპერიმენტულთან შედარებით 7.5%-ია, რაც არ აღემატება დასაშვებ ზღვარს.

ამონახსნის მდგრადობაზე გამოკვლევის შედეგებმა გვიჩვენა, რომ შემოფოთების შედეგად ექსპერიმენტული პროფილისთვის $C_y = 0.135$, ნაცვლად 0,138, ანუ ცდომილება 0,3%-ია, ხოლო მიღებული პროფილისთვის $C_y = 0.125$, ნაცვლად 0,127-ისა, ანუ 0,2%. ვინაიდან ცდომილება ორივე შემთხვევაში მცირეა და დასაშვებ ზღვარს არ აღემატება, შეგვიძლია დავსაკვნათ, რომ ამონახსნი მდგრადია.

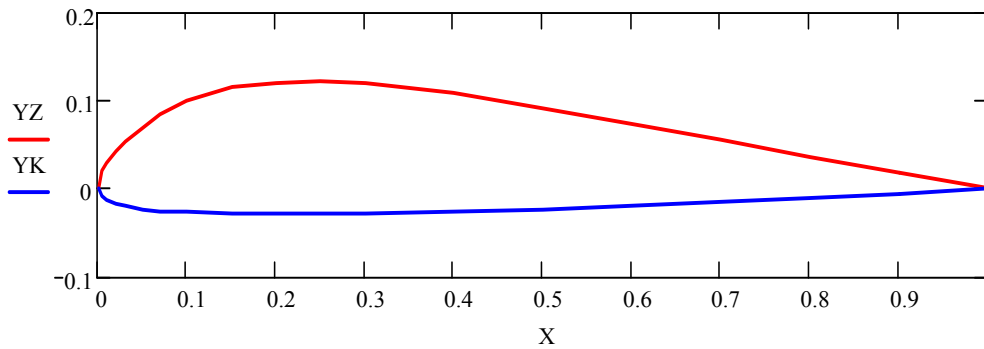
4.4 P-III 0.15 ექსპერიმენტული პროფილის გათვლა.

მოცემულია P-III 0.15 ექსპერიმენტული პროფილი



ნახ. 4.27 P-III 0.15 ექსპერიმენტული პროფილი

P-III 0.15 მიღებულ პროფილს აქვს სახე :



ნახ. 4.28 P-III 0.15 მიღებული პროფილი პროფილს

P-III 0.15 ექსპერიმენტული პროფილის გათვლების შედეგები:

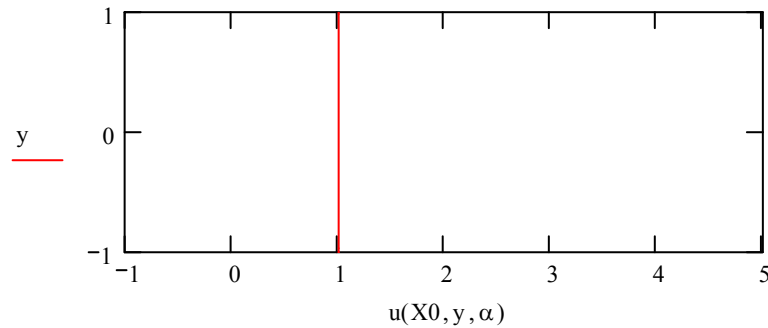
$$\text{IGR}(\alpha, \beta, \gamma) = 4.947 \times 10^{-6}$$

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = 2.606 \times 10^{-4}$$

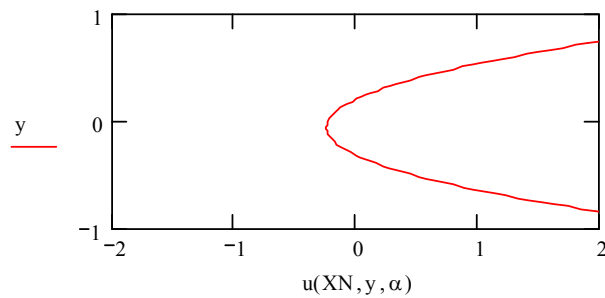
$$C\gamma(\gamma) = 0.195$$

$$\text{RZEDA}(\alpha, \beta) = 1.416 \times 10^{-4}$$

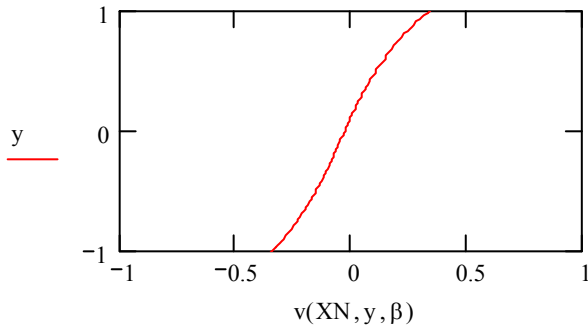
$$\text{RKVEDA}(\alpha, \beta) = 1.14 \times 10^{-4}$$



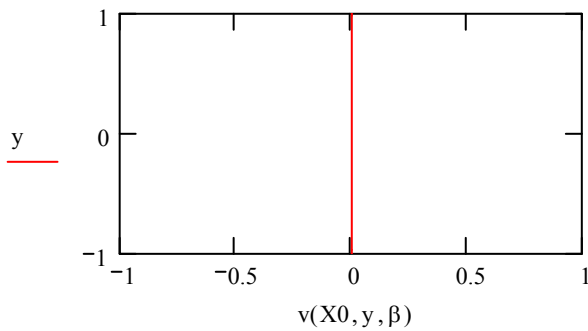
ა) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში



ბ) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

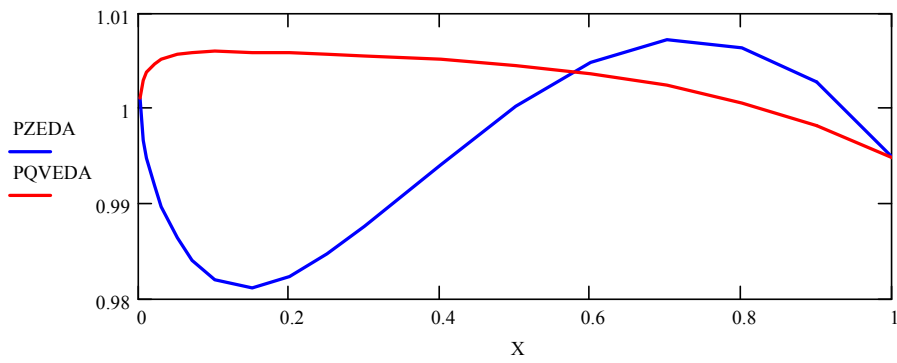


გ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

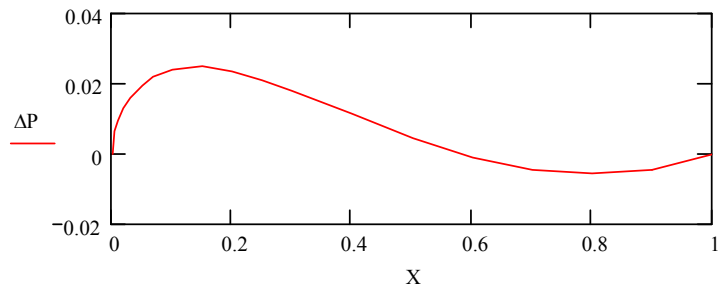


დ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში

ნახ. 4.29 P-III 0.15 ექსპერიმენტული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები



ნახ.4.30 წნევათა განაწილებები P-III 0.15 ექსპერიმენტული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე



ნახ.4.31 წნევათა სხვაობა P-III 0.15 ექსპერიმენტული პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს

P-III 0.15 მიღებული პროფილის გათვლების შედეგები:

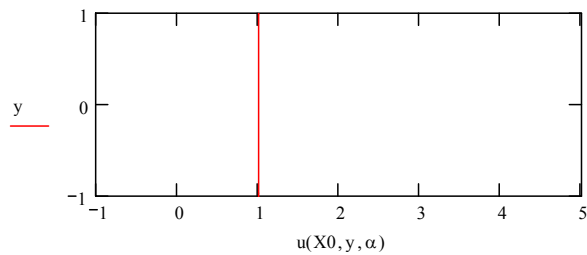
$$\text{IGR}(\alpha, \beta, \gamma) = 2.266 \times 10^{-5}$$

$$I(\alpha, \beta, \gamma) = 3.104 \times 10^{-4}$$

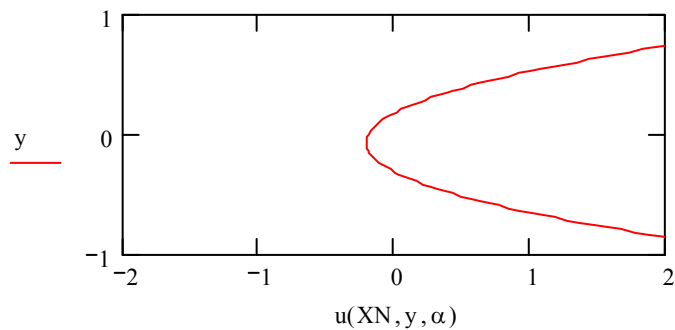
$$C\gamma(\gamma) = 0.212$$

$$\text{RZEDA}(\alpha, \beta) = 1.411 \times 10^{-4}$$

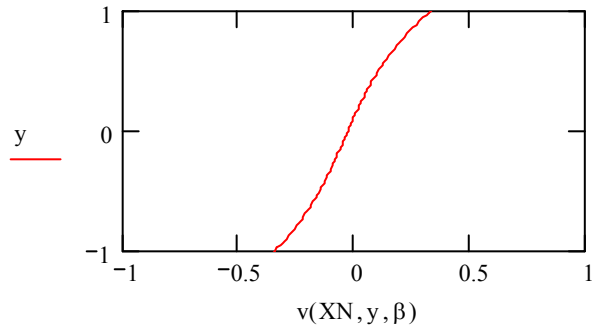
$$\text{RKVEDA}(\alpha, \beta) = 1.466 \times 10^{-4}$$



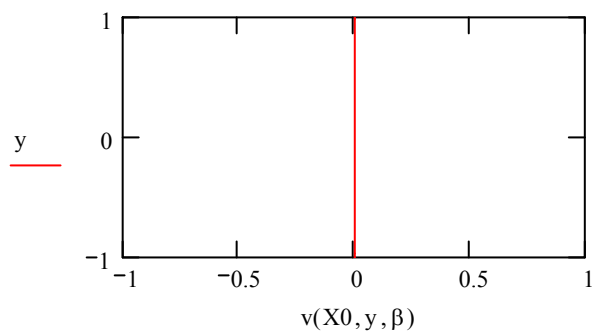
ა) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში



ბ) სიჩქარის ვექტორის u მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

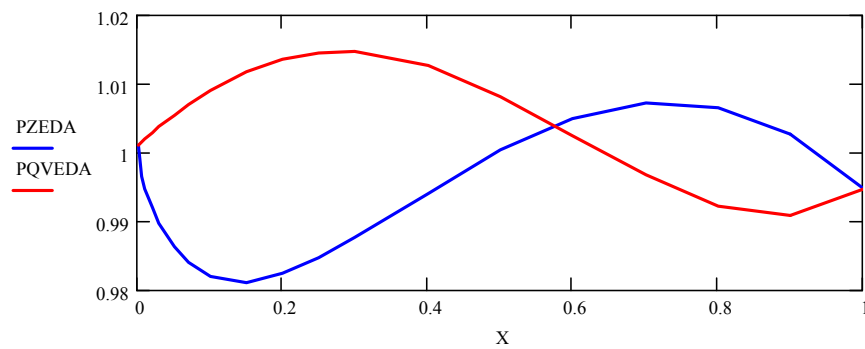


გ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საბოლოო კვეთში

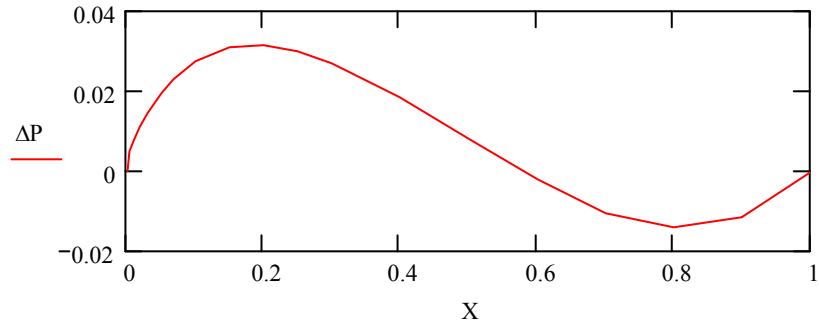


დ) სიჩქარის ვექტორის v მდგენელის ეპიურა საწყის კვეთში

ნახ. 4.32 P-III 0.15 მიღებული პროფილის გარსდენილი ნაკადის სიჩქარეთა ველის ეპიურები



ნახ.4.33 წნევათა განაწილებები P-III 0.15 მიღებული პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე



ნახ.4.34 წნევათა სხვაობა P-III 0.15 მიღებული პროფილის ქვედა და ზედა საზღვარს

ანალიზისთვის შედეგები გადავიტანოთ ცხრილში:

	C_y	I	IGR1	RZEDA	RKVEDA
ექსპერიმენტული	0.195	0,0002	0	0,00014	0.00016
მიღებული	0,212	0,00031	0	0.00014	0.00014

ცხრილი 5. P-III 0.15 პროფილის გარსდენის სურათის ანალიზი

ამრიგად, შეგვიძლია დავსაკვნათ, რომ ცდომილება არის 2%. რაც დასაშვებ ფარგლებშია. ქვედა საზღვრის ოპტიმალური პროფილი გვიჩვენებს, რომ მოცემული ზედა საზღვრის პირობებში მიღებული ქვედა საზღვრის კონტურის კოორდინატების ცდომილება ექსპერიმენტულთან შედარებით 3%-ია, რაც არ აღემატება დასაშვებ ზღვარს.

ამონახსნის მდგრადობაზე გამოკვლევის შედეგებმა გვიჩვენა, რომ შემფოთების შედეგად ექსპერიმენტული პროფილისთვის $C_y = 0.193$, ნაცვლად 0,195-ისა, ანუ ცდომილება 0,2%-ია, ხოლო მიღებული პროფილისთვის $C_y = 0.209$, ნაცვლად 0,212-ისა, ანუ 0,3%. ვინაიდან ცდომილება ორივე შემთხვევაში მცირეა და დასაშვებ ზღვარს არ აღემატება, შეგვიძლია დავსაკვნათ, რომ ამონახსნი მდგრადია.

დასკვნა

1. არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდის გამოყენებით ამოხსნილია თვითმფრინავის ფრთის ექსპერიმენტული პროფილის გარსდენის ამოცანა. ამონახსნი გვიჩვენებს, რომ ჩვენი ალგორითმის მიხედვით გამოთვლილი ინტეგრალური ცდომილების ფუნქცია (მიზნის ფუნქცია), რომელიც რამოდენიმე სასაზღვრო პირობისაგან შედგება მინიმალურია. ამოცანის პრაქტიკული გადაწყვეტა შესრულებულია პროგრამული პაკეტის Mathcad-ის საშუალებით.
2. ფრთის პროფილის მოცემული ზედა საზღვრის პირობებში, არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდის გამოყენებით ნაპოვანია ოპტიმალური ქვედა საზღვარი, ამწევი ძალის C_y , კოეფიციენტის მაქსიმიზაციის მიზნით. ამავე დროს, გათვალისწინებულია ზემოაღნიშნული ინტეგრალური ცდომილების ფუნქციის მინიმიზაციაც. შემდეგ, ჩვენს მიერ მიღებული პროფილის გარსდენის ამოცანა ამოხსნილია წინა პუნქტში აღნიშნული ალგორითმის მიხედვით. შედარებულია ექსპერიმენტული და მიღებული პროფილების გარსდენის ამოცანის ამონახსნები. რის მიხედვითაც შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ჩვენს მიერ მიღებული პროფილი ოპტიმალურია
3. განხილულია ორი ვარიანტი: 1) პროფილის გარსდენა ხდება პარაბოლური ეპიურის სიჩქარეთა ნაკადის მქონე სითხით, 2) სწორხაზოვანი ეპიურის სიჩქარეთა ნაკადის მქონე სითხით, ისე, როგორც ამას ახდენენ ექსპერიმენტების დროს. გამოკველულია ეპიურის ფორმის გავლენა გარსდენის რეჟიმზე. გამოკვლევის საფუძველზე დადგენილია, გარსდენილი სითხის სიჩქარეთა ეპიურის ფორმა მცირედ მოქმედებს გარსდენის რეჟიმზე.
4. ჩატარებულია რამოდენიმე ექსპერიმენტული პროფილის: ЦАГИ 845-14, NACA 4415, ME163, P-IIIА 0.15 თეორიული მოდელირება, კერძოდ, მოცემული ზედა საზღვრის პირობებში ნაპოვანია ოპტიმალური ქვედა საზღვრები. რომლებიც შედარებულია ამწევი ძალის C_y , კოეფიციენტების მიხედვით. ვინაიდან მათ მნიშვნელობებს შორის ცდომილება დასაშვებ

ზღვარს არ აღემატება. შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ჩვენს მიერ აგებული მათემატიკური მოდელი და ამოხსნის ალგორითმი რეალურად ასახავს სინამდვილეს, ანუ ადეკვატურია.

5. გამოკვლეულია ამონახსნის მდგრადობა პროფილის ქვედა საზღვრის დასშვები შემფოთების, კერძოდ $\Delta = 5\%$ -იანი ნაზრდის მინიჭების შემდეგ. შედეგები მიღებულია როგორც ექსპერიმენტული, ასევე მიღებული პროფილებისთვის, რის შედეგადაც შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ მოცემული შემფოთება უმნიშვნელო გავლენას ახდენს C_y კოეფიციენტზე და ტექნოლოგიურად ასეთი პროფილების დამზადება შესაძლებელია.

ამრიგად, ნაშრომში აგებულია ფრთის ოპტიმალური პროფილის პოვნის ალგორითმი პროგრამა MathCad-ზე, რომელიც საშუალებას იძლევა ცნობილი ზედა საზღვრის პირობებში ვიპოვოთ ქვედა საზღვრის ოპტიმალური ფორმა, იმ მიზნით, რომ ამწევი ძალის კოეფიციენტი იყოს მაქსიმალური. ეს ამოცანა მეტად აქტუალურია, რადგან თვითმფრინავის ფრთის გათვლა დღემდე, ძირითადად დამყარებულია ექსპერიმენტებზე აეროდინამიკურ მიღებში, რაც დიდ დანახარჯებთანაა დაკავშირებული. არსებობს ფრთის გარსდენის ამოცანების შესწავლის პროგრამული პაკეტები COSMOS და ANSYS, მაგრამ ისინი არ იძლევიან ოპტიმალური პროფილის პოვნის საშუალებას, არამედ იძლევიან არსებული პროფილების აეროდინამიკური მახასიათებლებს. მაშინ როდესაც, ჩვენს მიერ აგებული ალგორითმი საშუალებას იძლევა როგორც აეროდინამიკური მახასიათებლების დათვლი-სა, ასევე ოპტიმალური ქვედა საზღვრის პოვნისა.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ბეთანელი ა., საღინაძე ნ, სანაძე გ.. თვითმფრინავმშენებლობის სპეციალობის შესავალი. თბილისი: საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის საავიაციო ინსტიტუტი, 1998,
2. http://www.rcdesign.ru/articles/avia/wings_profile. უკანასკნელად გადამოწმებულია 10.06.2008
3. http://www.rcdesign.ru/articles/avia/wings_profile2. უკანასკნელად გადამოწმებულია 10.06.2008
4. А.А. Дьяченко, Э.Б. Микиртумов, В.В. Сушко, В.В.Филиппову Практическая аэродинамика самолетов с турбовинтовыми двигателями. Москва 1970. [21-33],
5. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В. Обратные краевые задачи аэрогидродинамики. – М.: Физматлит ВО «Наука», 1994. – 436 с.
6. Elizarov A.M., Il'inskiy N.B., Potashev A.V. Mathematical methods of airfoils design (inverse boundary-value problems of aerohydrodynamics). – Berlin: WILEY-VCH Verlag, 1997. – 280 p.
7. Елизаров А.М., Ильинский Н.Б., Поташев А.В., Степанов Г.Ю. Основные методы, результаты, приложения и нерешенные проблемы теории обратных краевых задач аэрогидродинамики. Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во «ДАС», 2001. – Т. 10. – 225 с.
8. Абзалилов Д.Ф., Ильинский Н.Б., Марданов Р.Ф. Задача максимизации циркуляции скорости при обтекании гладкого контура с источниками и стоками // ЖВМ и МФ. – 2000. – Т. 40. – № 1. – С. 82–90.
9. Абзалилов Д.Ф., Ильинский Н.Б., Степанов Г.Ю. Построение безотрывно обтекаемого крылового профиля с отбором внешнего потока в некотором диапазоне углов атаки // Изв. РАН. МЖГ. – 2000. – № 4. – С. 185–191.
10. Абзалилов Д.Ф., Ильинский Н.Б. Построение крыловых профилей с профилей с распределенным отсосом пограничного слоя // Изв. вузов. Авиаци. техника. – 1998. – № 3. – С. 33–38.
11. Абзалилов Д.Ф. Минимизация сопротивления путем распределенного отсоса пограничного слоя // Тр. Матем. центра имени Н.И. Лобачевского. Т. 5. Актуальные проблемы математики и механики. Матер. межд. науч. конф., Казань, 1 – 3 окт. 2000 г. – Казань: Изд-во «Унипресс», 2000. – С. 4–6.
12. Абзалилов Д.Ф. Оптимизация распределенного отсоса турбулентного пограничного слоя // Исследования и перспективные разработки в авиационной промышленности. Матер. 1-й науч.-практ. конф. молодых

ученых и специалистов, Москва, 20 – 22 нояб. 2002. – М.: ОАО «ОКБ Сухого», 2002. – С. 6–13.

13. Абзалилов Д.Ф., Ильинский Н.Б. Построение и оптимизация высококонесущих крыловых профилей с отбором внешнего потока // Ученые записки ЦАГИ. – 1998. – Т. XXIX. – № 3-4. – С. 52–61.
14. Абзалилов Д.Ф., Ильинский Н.Б. Построение крыловых профилей с выдувом реактивной струи // Изв. РАН. МЖГ. – 1999. – № 1. – С. 134–143.
15. Марданов Р.Ф. Метод проектирования крылового профиля с выдувом реактивной струи вблизи плоского экрана // Исследования и перспективные разработки в авиационной промышленности. Матер. 1-й науч.-практ. конф. молодых ученых и специалистов, Москва, 20 – 22 нояб. 2002. – М.: ОАО «ОКБ Сухого», 2002. – С. 105–113.
16. Белоусов С.Е., Ильинский Н.Б. Оптимизация аэродинамических характеристик крыловых профилей комплекса «крыло-двигатель» с отбором части внешнего потока и выдувом реактивной струи // Там же. – С. 233.
17. Долганов С.А., Ильинский Н.Б., Поляков Д.В. Построение крылового профиля по заданным распределениям толщины и нагрузки // Изв. вузов. Авиаци. техника. – 1999. – № 1. – С. 25–28.
18. Ильинский Н.Б., Фокин Д.А. Численно-аналитический метод достраивания крылового профиля с учетом вязкости несжимаемого потока // Изв. вузов. Авиаци. техника. – 1998. – № 4. – С. 34–41.
19. Абзалилов Д.Ф., Волков П.А. Решение обратной краевой задачи для двухэлементного крылового профиля // Тез. докл. VIII Четаевской межд. конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», Казань, 28 – 31 мая 2002 г. – Казань: Изд-во Казан. техн. ун-та, 2002.. – С. 227.
20. Абзалилов Д.Ф. Обратная краевая задача для крылового профиля экраноплана в диапазоне режимов обтекания // Там же. – С. 226.
21. Ильинский Н.Б., Поташев А.В. Модельная задача построения и аэродинамического расчета скользящего профиля крыла экраноплана // Изв. РАН. МЖГ. – 2003. – № 2.
22. Поташев А.В., Хабилов И.Х. Высоконесущие крыловые профили с чисто циркуляционным обтеканием // Тез. докл. VIII Четаевской межд. конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», Казань, 28 – 31 мая 2002 г. – Казань: Изд-во Казан. техн. ун-та, 2002. – С. 5.
23. Неберова О.С. Исследование особенности в хвостовой кромке при модификации профилей Жуковского // Там же. – С. 275.

24. Елизаров А.М., Фокин Д.А. Вариационные обратные краевые задачи аэрогидродинамики // Докл. АН России. – 2001. – Т. 377. – № 6. – С. 1–6.
25. Елизаров А.М., Ихсанова А.Н., Фокин Д.А. Численная оптимизация формы крыла экраноплана методами теории вариационных обратных краевых задач // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2001. – Т. 8. – № 1. – С. 165–167.
26. Ихсанова А.Н. Сравнительный анализ результатов вычислительных экспериментов в задачах оптимизации формы крыловых профилей с ограничением на максимум скорости // Исследования и перспективные разработки в авиационной промышленности. Матер. 1-й науч.-практ. конф. молодых ученых и специалистов, Москва, 20 – 22 нояб. 2002. – М.: ОАО «ОКБ Сухого», 2002. – С. 75–79.
27. Плотникова Л.Г. Об одном подходе к построению и оптимизации аэродинамических характеристик крылового профиля с элероном // Там же. – С. 134–141.
28. Ильинский Н.Б., Якимов Н.Д. О подъемной силе аэродинамического профиля типа дужки со стоком // ПМТФ. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 68–75.
29. Леонтьев В.Г. Численное решение задачи Лаврентьева для дужки вблизи горизонтального экрана // Тез. докл. VIII Четаевской межд. конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», Казань, 28 – 31 мая 2002 г. – Казань: Изд-во Казан. техн. ун-та, 2002. – С. 267.
30. Леонтьев В.Г., Поташев А.В. Высоконесящие модельные крыловые профили с двумя участками постоянной скорости на контуре // Изв. РАН. МЖГ. – 2001. – № 6. – С. 15–20.
31. Леонтьев В.Г., Поташев А.В. К проблеме построения высоконесущих модельных аэродинамических профилей // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2002. – № 2. – С. 24–28.
32. Ильинский Н.Б., Поташев А.В. Проблемы численной реализации обратных краевых задач аэрогидродинамики // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 7. Краевые задачи аэрогидромеханики и их приложения. Матер. межд. науч. конф., посв. 90-летию со дня рождения Г.Г. Тумашева, Казань, 21 – 24 нояб. 2000 г. – Казань: Изд-во «ДАС», 2000. – С. 94–95.
33. ოზგაძე თ. მათემატიკური მოდელირების კურსი (უწყვეტი მათემატიკური მოდელები) I ტომი. თბილისი 2006. გვ.88-93
34. Валландер С.В.. Лекции по гидроаэромеханике. Издательство Ленинградского университета. Ленинград, 1978
35. Спицын И.П. Соколова В.А. Общая и речная гидравлика. Ленинград. 1990г. [359-360]

36. ოზგაძე თ., დავითაშვილი ი. თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ოპტიმიზაცია ბგერამდედი, ბლანტი სითხით გარსდენისას. საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია "ახალი ინფორმაციული ტექნოლოგიები 2008". თბილისი . 2008
37. Ванько В.И, О. В. Ермошина, Г.Н. Кквыркин. Вариационное исчисление и оптимальное управление. Москва. Издательство МГТУ им, Н,Э,Баумана, 1999 ст. 424-429
38. Краснов М.Л, Г.И. Макаренко, А.И.Кисилёв. Вариационное исчисление. Издательство «Наука» Москва 1973. ст 56-59
39. ოზგაძე თ., დავითაშვილი ი. ახალი ალგორითმი პროფილის სტაციონარული გარსდენის ამოცანების ამოსახსნელად, ტექნ. უნივერსიტეტის შრომების კრებული, მას, №1(2), თბილისი, 2007
40. ოზგაძე თ., მჭედლიშვილი ნ., დავითაშვილი ი. არაწრფივი დაპროგრამების მეთოდის გამოყენება თვითმფრინავის ფრთის პროფილის ოპტიმიზაციისათვის. საერთაშორისო სამეცნიერო კონფერენცია "ინფორმაციული ტექნოლოგიები მარტვაში", ITS'07, თბილისი, 2007, II ნაწილი. 432-435
41. Обгадзе Т.А, Прангишвили А.И., Давиташвили И.А. Применение метода нелинейного программирования для оптимизации нижней части профиля крыла самолёта. Грузинский Технический Университет, Труды, АСУ №2(3), Тбилиси, 2007
42. Давиташвили. И.А. Влияние формы вектора скоростей набегающего потока на режим обтекания. Geogian Engineering News, No1,2008 103-106
43. Прангишвили А.И. Обгадзе Т.А .Давиташвили И.А. Оптимизация профиля крыла самолёта. Тезисы докладов. Всероссийский семинар по аэрогидродинамике, посвященный 90-летию со дня рождения Сергея Васильевича Валландера, Санкт-Петербург, 5-7 февраля 2008,
44. Обгадзе Т.А .Давиташвили И.А. Оптимизация профиля крыла самолёта. Тезисы докладов, международной конференции: «Нелинейная динамика и устойчивость», посвящённой 100 летию Ляпунова, Санкт-Петербург, 2007.
45. Прангишвили А.И. Обгадзе Т.А .Давиташвили И.А. Применение метода нелинейного программирования для оптимизации нижней части профиля крыла самолёта. XV Международная конференция Математика, компьютер. образование, тезисы докладов, Дубна , 2008 г., Россия, 28 января – 2 февраля.
46. Кашафутдинов С.Т., Лушин В.Н. Атлас аэродинамических характеристик крыловых профилей. 1994

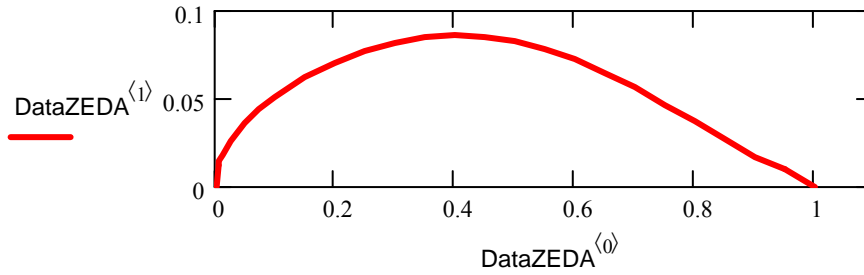
47. გუგუშვილი ა., თოფჩიშვილი ა., სალუქვაძე მ., ჭიჭინაძე ვ., ჯიბლაძე ნ. ოპტიმიზაციის მეთოდები. ტექნიკური უნივერსიტეტი. 2002
48. Асланиди Н., Чилачава Т. Оптимизация в примерах и задачах, учебно-методическое пособие. Тбилиси 2006.
49. გოგიჩაიშვილი გ., შონია ო., ქართველიშვილი ი. ოპერაციათა კვლევა. თბილისი ,1998.

დანართი

უცნობი ქვედა საზღვრის პოვნა პარაბოლური სიჩქარეთა ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას

პროფილის ზედა საზღვრის კოორდინატების მატრიცა

	1.0	0.0
	0.9502	0.0096
	0.9004	0.0166
	0.8506	0.02649
	0.8006	0.03653
	0.7507	0.04638
	0.7006	0.05572
	0.6505	0.06433
	0.6007	0.07189
	0.5502	0.07815
	0.5	0.08271
	0.4498	0.08522
DataZEDA :=	0.3995	0.08569
	0.3493	0.08426
	0.2990	0.08123
	0.2488	0.07658
	0.1986	0.07018
	0.1485	0.06175
	0.0984	0.05069
	0.0734	0.0438
	0.0485	0.03557
	0.0237	0.02506
	0.0113	0.01805
	0.0065	0.01422
	0.0041	0.0117
	0.0	0.0



VXZEDA := DataZEDA⁽⁰⁾

VYZEDA := DataZEDA⁽¹⁾

X := VXZEDA

Y := VYZEDA

X0=Xmin and XN=Xmax; Y0=Ymin and YN=Ymax; q - პროფილის წერტილთა რაოდენობა

X0 := -2

XN := 2

Y0 := -1

YN := 1

q := 25

a := rnd(1)

b := rnd(1)

k1 := 3

a1 := -1

b1 := 1

a11 := -0.1

b11 := 0.1

საბაზისო ფუნქციათა სისტემები

$\phi(x, y, m, n) := x^m \cdot y^n$

$\psi(x, y, m, n) := x^m \cdot y^n$

$\sigma(x, y, m, n) := x^m \cdot y^n$

საძებნი ფუნქციების გაშლა საბაზისო სისტემების მიმართ

$$u(x, y, \alpha) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \alpha_{m,n} \cdot \phi(x, y, m, n)$$

$$v(x, y, \beta) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \beta_{m,n} \cdot \psi(x, y, m, n)$$

$$p(x, y, \gamma) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \gamma_{m,n} \cdot \sigma(x, y, m, n)$$

ამწვევი ძალის კოეფიციენტი

$$Cy(a, b, \gamma) := \sum_{s=0}^q \left[p[X_s, (X_s - 1)[a \cdot (X_s)^2 + b \cdot X_s], \gamma] - p(X_s, Y_s, \gamma) \right]$$

სასაზღვრო პირობები

$$RZEDA(\alpha, \beta) := \sum_{s=0}^q \left(u(X_s, Y_s, \alpha)^2 + v(X_s, Y_s, \beta)^2 \right)$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) := \sum_{s=0}^q u \left[X_s, (X_s - 1) \cdot [a \cdot (X_s)^2 + b \cdot X_s], \alpha \right]^2$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) := RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) + \sum_{s=0}^q v \left[X_s, (X_s - 1) [a \cdot (X_s)^2 + b \cdot X_s], \beta \right]^2$$

$$IGR1(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{Y_0}^{Y_N} \left[u(X_0, y, \alpha) - (Y_0^2 - y^2) \right]^2 dy + \int_{Y_0}^{Y_N} v(X_0, y, \beta)^2 dy$$

ჯამური ინტეგრალური ცდომილება

$$I(\alpha, \beta, \gamma, a, b) := IGR1(\alpha, \beta, \gamma) + RZEDA(\alpha, \beta) + RKVEDA(\alpha, \beta, a, b)$$

$$I(\alpha, \beta, \gamma, a, b) := I(\alpha, \beta, \gamma, a, b) \cdot 10 + Cy(a, b, \gamma)^{-2}$$

დამხმარე ფუნქციები ბერნულის განტოლებისთვის

$$E1(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{Y_0}^{Y_N} \left[p(X_0, y, \gamma) + 1.1 \cdot (u(X_0, y, \alpha)^2 + v(X_0, y, \beta)^2) \right] dy$$

$$E2(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{Y_0}^{Y_N} p(X_N, y, \gamma) + 1.1 \cdot (u(X_N, y, \alpha)^2 + v(X_N, y, \beta)^2) dy$$

$$E3(\alpha, \beta, \gamma) := 0.11 \cdot \frac{X_N - X_0}{Y_N - Y_0} \cdot \int_{Y_0}^{Y_N} \frac{u(X_N, y, \alpha)^2 + v(X_N, y, \beta)^2 + (u(X_0, y, \alpha)^2 + v(X_0, y, \beta)^2)}{4} dy$$

$$E4(\alpha, \beta, \gamma) := E3(\alpha, \beta, \gamma) + 0.11 \cdot \frac{X_N - X_0}{Y_N - Y_0} \cdot \int_{Y_0}^{Y_N} \frac{\sqrt{(u(X_0, y, \alpha)^2 + v(X_0, y, \beta)^2) \cdot (u(X_N, y, \alpha)^2 + v(X_N, y, \beta)^2)}}{2} dy$$

საწყისი მონაცემების არჩევა

$$m := 0.. k1$$

$$n := 0.. k1$$

$$a := -1 + 2 \cdot \text{rnd}(1)$$

$$b := -1 + 2 \cdot \text{rnd}(1)$$

$$\alpha_{m,n} := a1 + (b1 - a1) \cdot \text{rnd}(1)$$

$$\beta_{m,n} := a11 + (b11 - a11) \cdot \text{rnd}(1)$$

$$\gamma_{m,n} := a1 + (b1 - a1) \cdot \text{rnd}(1)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} -0.997 & -0.613 & 0.17 & -0.299 \\ 0.646 & -0.652 & 0.421 & -0.392 \\ -0.817 & -0.705 & 0.977 & -0.762 \\ -0.982 & 0.063 & 0.204 & -0.668 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} -0.01 & -0.089 & 0.057 & 0.004 \\ 0.075 & 0.091 & 0.008 & -0.008 \\ 0.072 & 0.056 & 0.099 & 0.022 \\ -0.047 & 0.068 & -0.025 & 0.035 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} -0.982 & -0.448 & 0.176 & 0.675 \\ -0.03 & 0.487 & -0.084 & 0.489 \\ 0.198 & 0.47 & 0.145 & -0.697 \\ -0.15 & 0.034 & 0.503 & -0.662 \end{pmatrix}$$

Giver

მასის შენახვის კანონი და ბერნულის განტოლება ბლანტი სითხეებისათვის

$$\int_{Y_0}^{Y_N} u(X_0, y, \alpha) dy = \int_{Y_0}^{Y_N} u(X_N, y, \alpha) dy + \int_{X_0}^{X_N} (v(x, Y_0, \beta) + v(x, Y_N, \beta)) dx$$

$$(X_s - 1)[a \cdot (X_s)^2 + b \cdot X_s] \leq Y$$

$$\int_{Y_0}^{Y_N} u(X_0, y, \alpha) dy \geq 0$$

$$\int_{Y_0}^{Y_N} u(X_0 + 0.1, y, \alpha) dy \geq 0$$

$$0.999 \leq p(0, 0, \gamma) \leq 1.001$$

ენერჯის მუდმივობის კანონი ტურბულენტური დინებისათვის

$$E1(\alpha, \beta, \gamma) - E2(\alpha, \beta, \gamma) = E4(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$S := \text{Minimize}(I, \alpha, \beta, \gamma, a, b)$$

$$\alpha := S_0$$

$$\beta := S_1$$

$$\gamma := S_2$$

$$S = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.009 & -0.158 & 0.04 & -0.131 \\ -0.091 & -0.02 & 0.171 & -0.162 \\ 0.132 & 0.118 & 0.014 & 0.107 \\ -0.042 & 0.042 & 0.107 & 0.077 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0.003 & -0.038 & 0.016 & 0.002 \\ 0.021 & 0.032 & 0.002 & -0.004 \\ 0.009 & 0.038 & 0.025 & 0.012 \\ -0.003 & 0.003 & -0.005 & 0.012 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1.001 & -0.983 & 0.043 & 0.331 \\ -0.008 & -0.145 & -0.021 & 0.243 \\ 0.05 & 0.03 & 0.036 & -0.35 \\ -0.044 & 0.016 & 0.101 & -0.332 \end{pmatrix} \\ -0.004 \\ 0.27 \end{pmatrix}$$

$$a := S_3$$

b := S₄

$$u(x, y, \alpha) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \alpha_{m,n} \cdot \phi(x, y, m, n)$$

$$v(x, y, \beta) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \beta_{m,n} \cdot \psi(x, y, m, n)$$

$$p(x, y, \gamma) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \gamma_{m,n} \cdot \sigma(x, y, m, n)$$

Cy(a, b, γ) = 2.226

a = -0.004

b = 0.27

სიზუსტის შეფასებები

IGR1(α, β, γ) = 0.017

RKVEDA(α, β, a, b) = 0.004

RZEDA(α, β) = 0.008

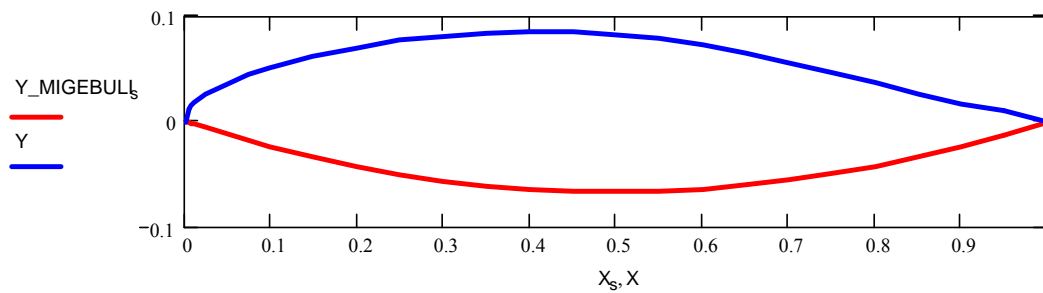
l(S₀, S₁, S₂, a, b) = 0.494

p(0, 0, γ) = 1.001

პროფილი მიღებული ქვედა საზღვრით

s := 0.. 25

$$Y_MIGEBUL_s := (X_s - 1) \left[a \cdot (X_s)^2 + b \cdot X_s \right]$$

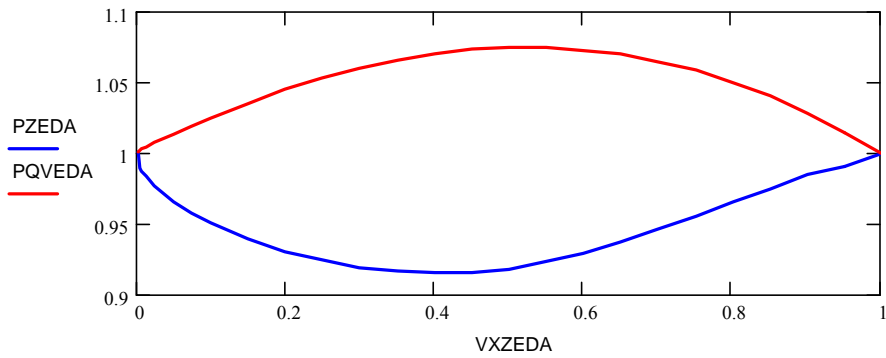


წნევათა განაწილებები პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე

i1 := 0.. q

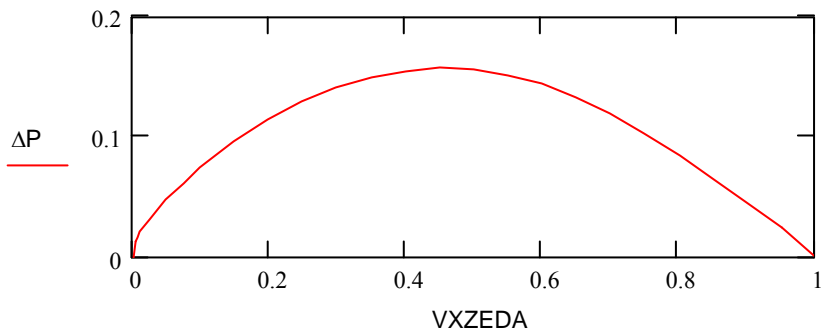
$$PZEDA_{i1} := p(VXZEDA_{i1}, VYZEDA_{i1}, \gamma)$$

$$PQVEDA_{i1} := p(VXZEDA_{i1}, Y_MIGEBUL_{i1}, \gamma)$$

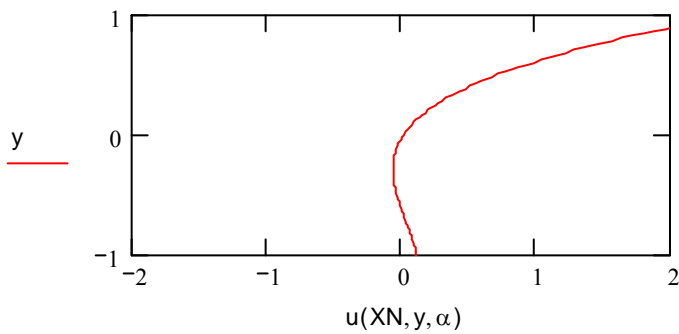
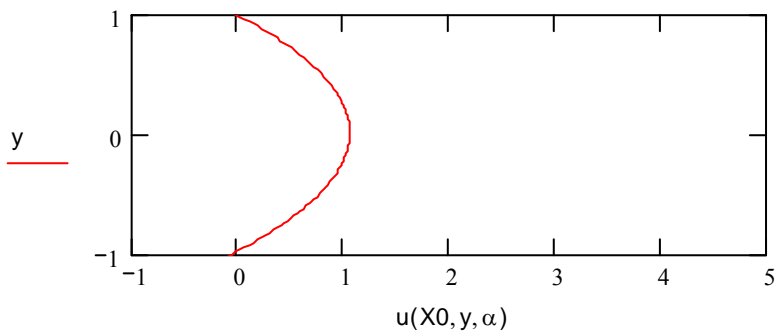


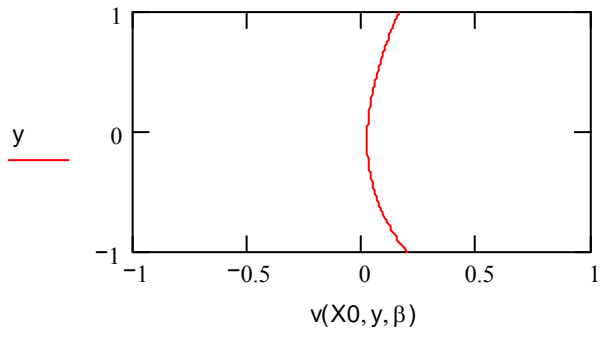
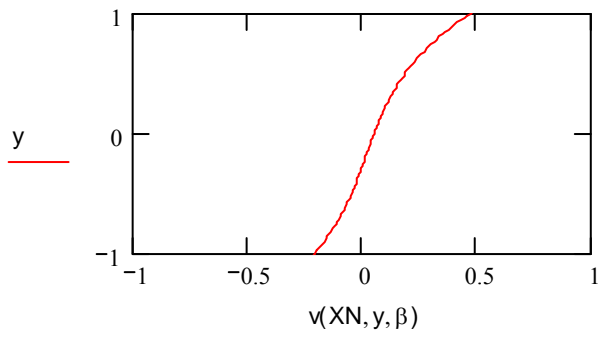
წნევათა სხვაობა პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარს შორის

$$\Delta P := PQVEDA - PZEDA$$



სიჩქარეთა ველის ეპიურები

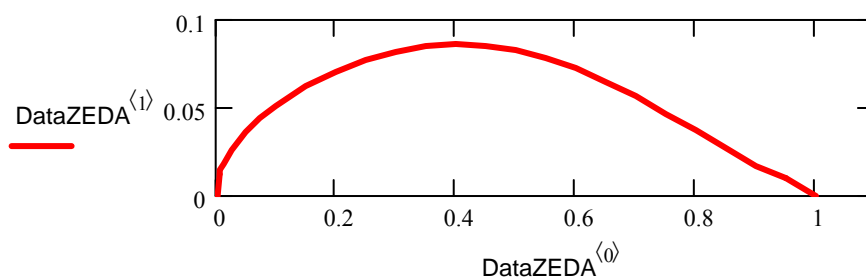




უცნობი ქვედა საზღვრის პოვნა პარაბოლური სიჩქარეთა ეპიურის მქონე ნაკადით გარსდენისას თვითმფრინავის ხარისხის მაქსიმიზაციის მიზნით

პროფილის ზედა საზღვრის კოორდინატების მატრიცა

1.0	0.0
0.9502	0.0096
0.9004	0.0166
0.8506	0.02649
0.8006	0.03653
0.7507	0.04638
0.7006	0.05572
0.6505	0.06433
0.6007	0.07189
0.5502	0.07815
0.5	0.08271
0.4498	0.08522
0.3995	0.08569
0.3493	0.08426
0.2990	0.08123
0.2488	0.07658
0.1986	0.07018
0.1485	0.06175
0.0984	0.05069
0.0734	0.0438
0.0485	0.03557
0.0237	0.02506
0.0113	0.01805
0.0065	0.01422
0.0041	0.0117
0.0	0.0



VXZEDA := DataZEDA^{<0>}
 VYZEDA := DataZEDA^{<1>}

X := VXZEDA

Y := VYZEDA

X0=Xmin and XN=Xmax; Y0=Ymin and YN=Ymax; q - პროფილის წერტილთა რაოდენობა

X0 := -2

XN := 2

Y0 := -2

YN := 2

q := 25

a := rnd(1)

b := rnd(1)

k1 := 3

a1 := -1

b1 := 1

a11 := -0.1

b11 := 0.1

g := 9.8

საბაზისო ფუნქციათა სისტემები

$$\phi(x, y, m, n) := x^m \cdot y^n$$

$$\psi(x, y, m, n) := x^m \cdot y^n$$

$$\sigma(x, y, m, n) := x^m \cdot y^n$$

საძებნი ფუნქციების გაშლა საბაზისო სისტემების მიმართ

$$u(x, y, \alpha) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \alpha_{m,n} \cdot \phi(x, y, m, n)$$

$$v(x, y, \beta) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \beta_{m,n} \cdot \psi(x, y, m, n)$$

$$p(x, y, \gamma) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \gamma_{m,n} \cdot \sigma(x, y, m, n)$$

ამწვევი ძალის კოეფიციენტი

$$C_y(a, b, \gamma) := \sum_{s=0}^q \left[p[X_s, (X_s - 1)[a \cdot (X_s)^2 + b \cdot X_s], \gamma] - p(X_s, Y_s, \gamma) \right]$$

წინააღმდეგობის ძალის კოეფიციენტი

$$C_x(a, b, \gamma) := \sum_{s=0}^{12} \left[p[X_s, (X_s - 1)[a \cdot (X_s)^2 + b \cdot X_s], \gamma] + p(X_s, Y_s, \gamma) \right]$$

$$C_x(a, b, \gamma) := C_x(a, b, \gamma) - \sum_{s=13}^q \left[p[X_s, (X_s - 1)[a \cdot (X_s)^2 + b \cdot X_s], \gamma] + p(X_s, Y_s, \gamma) \right]$$

ფრთის აეროდინამიკური ხარისხი

$$K(a, b, \gamma) := \frac{C_y(a, b, \gamma)}{C_x(a, b, \gamma)}$$

სასაზღვრო პირობები

$$RZEDA(\alpha, \beta) := \sum_{s=0}^q \left(u(X_s, Y_s, \alpha)^2 + v(X_s, Y_s, \beta)^2 \right)$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) := \sum_{s=0}^q u \left[X_s, (X_s - 1) \cdot [a \cdot (X_s)^2 + b \cdot X_s], \alpha \right]^2$$

$$RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) := RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) + \sum_{s=0}^q v \left[X_s, (X_s - 1) \cdot [a \cdot (X_s)^2 + b \cdot X_s], \beta \right]^2$$

$$IGR1(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{Y_0}^{Y_N} \left[u(X_0, y, \alpha) - (Y_0^2 - y^2) \right]^2 dy + \int_{Y_0}^{Y_N} v(X_0, y, \beta)^2 dy$$

$$IGR2(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{X_0}^{X_N} (u(x, 0.7, \alpha) - 1)^2 dx + \int_{X_0}^{X_N} v(x, 0.7, \beta)^2 dx$$

$$IGR3(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{X_0}^{X_N} (u(x, -0.7, \alpha) - 1)^2 dx + \int_{X_0}^{X_N} v(x, -0.7, \beta)^2 dx$$

ჯამური-ინტეგრალური ცდომილება

$$I(\alpha, \beta, \gamma, a, b) := (IGR1(\alpha, \beta, \gamma) + IGR2(\alpha, \beta, \gamma) + IGR3(\alpha, \beta, \gamma) + RZEDA(\alpha, \beta) + RKVEDA(\alpha, \beta, a, b))$$

$$I(\alpha, \beta, \gamma, a, b) := I(\alpha, \beta, \gamma, a, b) + K(a, b, \gamma)^{-2}$$

დამხმარე ფუნქციები ბერნულის განტოლებისთვის

$$E1(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{Y_0}^{Y_N} \left[p(X_0, y, \gamma) + 1.1 \cdot (u(X_0, y, \alpha)^2 + v(X_0, y, \beta)^2) \right] dy$$

$$E2(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{Y_0}^{Y_N} p(X_N, y, \gamma) + 1.1 \cdot (u(X_N, y, \alpha)^2 + v(X_N, y, \beta)^2) dy$$

$$E3(\alpha, \beta, \gamma) := \int_{Y_0}^{Y_N} \frac{0.026}{(Y_N - Y_0)^{0.3}} \frac{X_N - X_0}{Y_N - Y_0} \frac{u(X_N, y, \alpha)^2 + v(X_N, y, \beta)^2 + (u(X_0, y, \alpha)^2 + v(X_0, y, \beta)^2) + 2 \cdot \sqrt{(u(X_0, y, \alpha)^2 + v(X_0, y, \beta)^2) \cdot (u(X_N, y, \alpha)^2 + v(X_N, y, \beta)^2)}}{4} dy$$

საწყისი მონაცემების არჩევა

$$m := 0.. k1$$

$$n := 0.. k1$$

$$a := -1 + 2 \cdot \text{rnd}(1)$$

$$b := -1 + 2 \cdot \text{rnd}(1)$$

$$\alpha_{m,n} := a1 + (b1 - a1) \cdot \text{rnd}(1)$$

$$\beta_{m,n} := a11 + (b11 - a11) \cdot \text{rnd}(1)$$

$$\gamma_{m,n} := a1 + (b1 - a1) \cdot \text{rnd}(1)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0.646 & -0.652 & 0.421 & -0.392 \\ -0.817 & -0.705 & 0.977 & -0.762 \\ -0.982 & 0.063 & 0.204 & -0.668 \\ -0.098 & -0.886 & 0.567 & 0.04 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0.075 & 0.091 & 0.008 & -0.008 \\ 0.072 & 0.056 & 0.099 & 0.022 \\ -0.047 & 0.068 & -0.025 & 0.035 \\ -0.098 & -0.045 & 0.018 & 0.068 \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} -0.03 & 0.487 & -0.084 & 0.489 \\ 0.198 & 0.47 & 0.145 & -0.697 \\ -0.15 & 0.034 & 0.503 & -0.662 \\ -0.016 & 0.4 & -0.705 & -0.717 \end{pmatrix}$$

Giver

მასის შენახვის კანონი და ბერნულის განტოლება ბლანტი სითხეებისათვის

$$\int_{Y_0}^{Y_N} u(X_0, y, \alpha) dy = \int_{Y_0}^{Y_N} u(X_N, y, \alpha) dy + \int_{X_0}^{X_N} (v(x, Y_0, \beta) + v(x, Y_N, \beta)) dx$$

$$(X_S - 1)[a \cdot (X_S)^2 + b \cdot X_S] \leq Y$$

$$K(a, b, \gamma) \geq 0$$

$$\int_{Y_0}^{Y_N} u(X_0, y, \alpha) dy \geq 0$$

$$\int_{Y_0}^{Y_N} u(X_0 + 0.1, y, \alpha) dy \geq 0$$

$$0.999 \leq p(0, 0, \gamma) \leq 1.001$$

ენერჯის მუდმივობის კანონი ტურბულენტური დინებისათვის

$$E1(\alpha, \beta, \gamma) - E2(\alpha, \beta, \gamma) = E3(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$S := \text{Minimize}(I, \alpha, \beta, \gamma, a, b)$$

$$\alpha := S_0$$

$$\beta := S_1$$

$$\gamma := S_2$$

$$S = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.11 & 0.343 & 0.532 & -0.215 \\ -0.456 & 0.147 & 1.4 & -0.577 \\ 0.435 & 0.08 & 0.001 & -0.182 \\ -0.119 & 0.026 & -0.169 & 0.037 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0.038 & 0.069 & 0.008 & -0.008 \\ 0.067 & 0.059 & 0.027 & 0.021 \\ -0.044 & 0.035 & -0.014 & 0.031 \\ -0.06 & -0.035 & 0.008 & 0.027 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1.001 & -7.853 & -0.105 & 0.434 \\ 0.971 & -2.714 & 0.113 & -0.743 \\ 0.232 & 0.025 & 0.348 & -0.682 \\ -0.013 & -0.461 & -1.472 & -0.729 \end{pmatrix} \\ -0.255 \\ 0.242 \end{pmatrix}$$

$$a := S_3$$

$b := S_4$

$$u(x, y, \alpha) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \alpha_{m,n} \cdot \phi(x, y, m, n)$$

$$v(x, y, \beta) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \beta_{m,n} \cdot \psi(x, y, m, n)$$

$$p(x, y, \gamma) := \sum_{m=0}^{k1} \sum_{n=0}^{k1} \gamma_{m,n} \cdot \sigma(x, y, m, n)$$

$Cy(a, b, \gamma) = 14.73$

$Cx(a, b, \gamma) = 16.072$

$a = -0.255$

$b = 0.242$

$K(a, b, \gamma) = 0.916$

სიზუსტის შეფასებები

$IGR1(\alpha, \beta, \gamma) = 0.492$

$RKVEDA(\alpha, \beta, a, b) = 0.137$

$RZEDA(\alpha, \beta) = 0.172$

$I(S_0, S_1, S_2, a, b) = 5.752$

$IGR2(\alpha, \beta, \gamma) = 1.733$

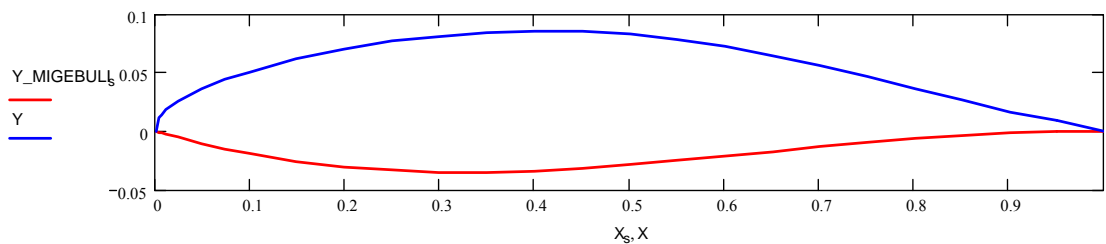
$IGR3(\alpha, \beta, \gamma) = 2.027$

$p(0, 0, \gamma) = 1.001$

პროფილი მიღებული ქვედა საზღვრით

$s := 0..25$

$$Y_MIGEBUL_s := (X_s - 1) [a \cdot (X_s)^2 + b \cdot X_s]$$

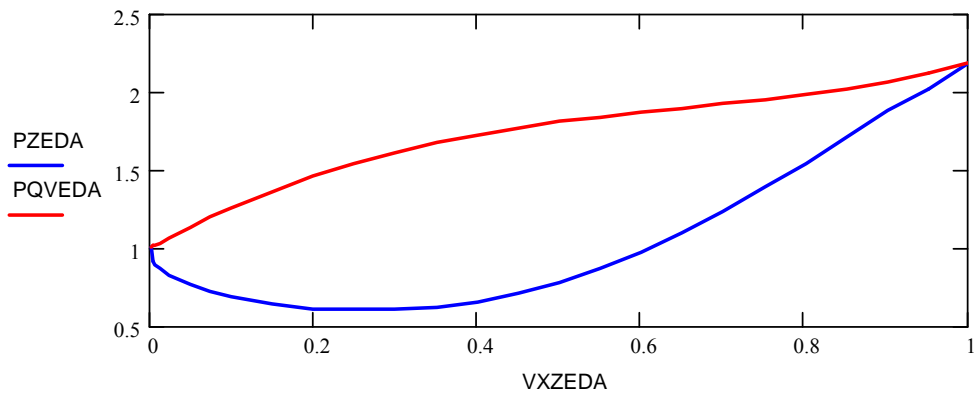


წინეათა განაწილებები პროფილის ზედა და ქვედა საზღვარზე

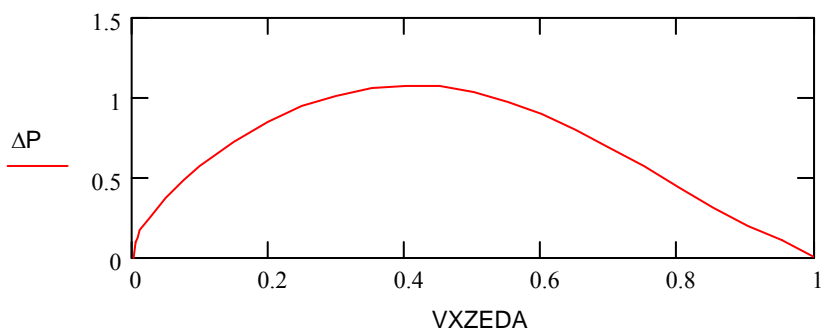
$i1 := 0..q$

$$PZEDA_{i1} := p(VXZEDA_{i1}, VYZEDA_{i1}, \gamma)$$

$$PQVEDA_{i1} := p(VXZEDA_{i1}, Y_MIGEBUL_{i1}, \gamma)$$



$$\Delta P := PQVEDA - PZEDA$$



სიჩქარეთა ველის ეპიურები

