საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

გიორგი პაპუკაშვილი

ზოგიერთი კლასის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდების აგება და კვლევა

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

წარდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა“

შიფრი 0501

თბილისი

2018 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში

ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელები: პროფ.დავით ნატროშვილი

პროფ. ჯემალ ფერაძე

რეცენზენტები:-----------------------------------

დაცვა შედგება 2018 წლის ------ ივლისს -------- საათზე საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე კორპუსი ------------------ , აუდიტორია ________________.

მისამართი:0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,

ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

თემის აქტუალობა

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება გამოთვლითი მექანიკის რამდენიმე საკითხს. სახელდობრ,აიგო და გამოკვლეულ იქნა რიცხვითი ალგორითმები სიმისა და ძელისათვის ზოგიერთი სტატიკური და დინამიკური მათემატიკური მოდელებისთვის. ამ მოდელების გამოკვლევას და რიცხვით ამოხსნას ეძღვნება მრავალი ნაშრომი, თუმცა ბევრი რამ ამ მიმართულებით დღესაც შესასწავლია.

ჩვენი ვარაუდით, მიღებულ შედეგებს ექნება არა მხოლოდ წმინდა მათემატიკური, არამედ გარკვეული პრაქტიკული მნიშვნელობა და შესაძლებელი გახდება მათი გამოყენება კონსტრუქციების აღწერის დარგებში. კონსტრუქციების შესაბამისი მათემატიკური მოდელების მეშვეობით გამოკვლევების ჩატარება სწრაფად განვითარებად დარგს წარმოადგენს.

მოკლედ შევეხოთ მოცემული პრობლემის ისტორიულ ასპექტს. მყარი სხეულების დეფორმაციის მათემატიკური მოდელები მუდმივად განიცდიან განვითარების პროცესს. მართლაც, გავიხსენოთ, რომ რხევადი სიმის მდგომარეობა XVIII საუკუნეში აღწერილი იქნა დალამბერის (D'Alembert) წრფივი ჰიპერბოლური ტიპის განტოლებით. მომდევნო საუკუნეში ცნობილმა გერმანელმა მექანიკოსმა კირხჰოფმა (G.Kirchhoff) უფრო ზუსტად აღწერა აღნიშნული სხეულის დინამიკური ყოფაქცევა. მისმა მოდელმა მექანიკისა და მათემატიკის დარგში მომუშავე მეცნიერების საკმაოდ დიდი ყურადღება მიიქცია. პირველი შრომა, რომელშიც გამოკვლეულია ამოხსნადობა კირხჰოფის სიმისთვის, გამოქვეყნდა 1940 წელს. მისი ავტორი გახლდათ ცნობილი მეცნიერი ბერშტეინი (S.Bernstein). კირხჰოფის მიერ შემოტანილი ე.წ. K - კორექციის შემცველი მსგავსი განტოლება გვხვდება კარიერთანაც (G.Carrier). XX საუკუნეში კირხჰოფის მოდელები განაზოგადა

ტიმოშენკომ (S.Timoshenko), რომელიც თანამედროვე საინჟინრო მექანიკის ფუძემდებლად მიიჩნევა.

წინამდებარე სადისერტაციო ნაშრომში შესწავლილია, როგორც კირხჰოფის, ასევე ტიმოშენკოს ტიპის ზოგიერთი მათემატიკური მოდელი მათი ალგორითმიზაციის კუთხით.

სამუშაოს მიზანი

ბევრი თანამედროვე კონსტრუქცია შეიცავს სიმებს, ძელებს, ფირფიტებსა და გარსებს. ჩვენს მიერ აგებულია რიცხვითი ალგორითმები, როგორც სტატიკური, ასევე დინამიკური სიმებისა და ძელებისათვის, რომლებიც დიდ გამოყენებას პოულობენ თეორიულ და სამშენებლო მექანიკაში. აღნიშნული მეთოდების გამოყენება შეიძლება ფირფიტებისა და გარსებისთვის. სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი მიზანია: სიმებისა და ძელებისათვის დასმული ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგება და კვლევა, შესაბამისი პროგრამული უზრუნველყოფა და რიცხვითი ტესტირება.

კვლევის ობიექტი და მეთოდები

სამეცნიერო კვლევის ძირითადი ობიექტებია კირხჰოფისა და ტიმოშენკოს ტიპის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები, რომელთა საშუალებითაც აღიწერება სიმებისა და ძელების, როგორც სტატიკური, ასევე დინამიკური მდგომარეობა. შესაბამისი სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამოსახსნელად გამოკვლეულია სხვადასხვა რიცხვითი ალგორითმის ეფექტურობა, ჩატარებულია კომპიუტერული ექსპერიმენტი. კირხჰოფისა და ტიმოშენკოს ტიპის განტოლებების შესწავლისას ჩვენს მიერ შემოთავაზებულ ალგორითმებში გამოყენებულია

გალიორკინისა და ჩიპოს მეთოდები, სიმეტრიული მდგრადი სხვაობიანი სქემები, დისკრეტულ განტოლებათა სისტემების ამოსახსნელად კი გამოყენებულია ნიუტონის, იაკობისა და პიკარის იტერაციული მეთოდები.

ნაშრომის ძირითადი შედეგები და მეცნიერული სიახლე

სადისერტაციო ნაშრომში შესწავლილია როგორც სტატიკური, ასევე დინამიკური მათემატიკური მოდელები სიმისა და ძელისთვის. ნაშრომის პირველ ნაწილში განხილულია ამოცანები სიმისთვის, ხოლო მეორე ნაწილში - ძელისთვის. დისერტაციაში ძირითადად გამოკვლეულია სიმებისა და ძელებისთვის დასმული ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების სიზუსტე. ალგორითმების სიზუსტე გამოკვლეულია მთელი სისრულით.

კირხჰოფის სტატიკური სიმისთვის ორიგინალური მეთოდი შემოთავაზებული იქნა შვეიცარიელი მათემატიკოსის ჩიპოს (M.Chipot) მიერ. ეს მეთოდი შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანებისთვის იძლევა ზუსტ ამონახსნს, როცა ალგორითმის რეალიზაციის ყველა ეტაპზე გამოთვლები ზუსტად ჩატარდება. ვინაიდან აღნიშნული ალგორითმის რეალიზება გულისხმობს გარკვეული რთული ინტეგრალების გამოთვლას, ტრანსცენდენტური განტოლებების ამოხსნასა და ა.შ., ამიტომ, პრაქტიკულად იშვიათად ხერხდება ამოცანის ზუსტი ამონახსნის მიღება. ამის გამო, მიზნად დაისახა ამოცანა, თუ რა გავლენას მოახდენს საბოლოო შედეგზე შესაბამისი პარამეტრების მიახლოებითი გათვლა. ეს საკითხი გამოკვლეულია ჩვენს მიერ პირველად და აღწერილია სადისერტაციო ნაშრომში. ასევე, გამოკვლეულია ჩიპოს მეთოდის რეალური გამოყენების სფერო.რაც შეეხება დინამიკური სიმის საკითხებს, ძირითადი ყურადღება გადატანილ იქნა ალგორითმების აგებასა და შესაბამის კომპიუტერულ გამოთვლებზე.

ნაშრომის მეორე ნაწილში განხილულია ს.ტიმოშენკოს კლასის ჯ.ბოლის (J.Ball) მოდელი. ძელისათვის ჯ.ბოლის მოდელი შეიცავს, როგორც კერძო შემთხვევებს, ამავე კლასის ძელის სხვა მოდელებსაც, მათ შორის, ცნობილ ვოინოვსკი-კრიგერის (S.Woinowsky-Krieger) მოდელს. ჩვენს მიერ აგებულ იქნა სამ ეტაპიანი რიცხვითი ალგორითმი, რომლის შემადგენელი ნაწილებია: პროექციული მეთოდი, სიმეტრიული არაცხადი სხვაობიანი სქემა და იტერაციული პროცესი. შეფასებულია თითოეული ამ ნაწილის სიზუსტე. საჭიროების შემთხვევაში შესაძლებელია ალგორითმის სრული ცდომილების შეფასების მიღება. ჩვენი მონაცემებით, ეს არის პირველი შედეგი ძელის აღნიშნული მოდელებისათვის, რომლის საშუალებითაც შესაძლებელია ალგორითმის საბოლოო ცდომილების აღწერა. რაც შეეხება სტატიკურ ძელს, რომელზეც მოქმედი ძალა დამოკიდებულია გადაადგილების ფუნქციაზე და გადაადგილების სიჩქარეზე, ჩვენს მიერ დაყვანილია ინტეგრალურ განტოლებაზე, რომლის ამოსახსნელადაც საკმარისია მხოლოდ იტერაციული პროცესის გამოყენება.

ჩატარებულია რიცხვითი გამოთვლები, რომლებმაც კონკრეტული მაგალითების შემთხვევაში დაადასტურა სათვლელი ალგორითმების გარკვეული ეფექტურობა.

შედეგების გამოყენების სფერო

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, სადისერტაციო ნაშრომი წარმოადგენს გამოთვლითი მექანიკის მიმართულებით ჩატარებულ კვლევას. ჩვენს მიერ მიღებული შედეგების საშუალებით შესაძლებელია შესწავლილ იქნას კონსტრუქციებში გამოყენებული ზოგიერთი მყარი ელემენტების დინამიკური და სტატიკური ყოფაქცევა, რაც ფართოდ გამოიყენება მშენებლობის სხვადასხვა დარგში, კერძოდ სამშენებლო მექანიკაში.

აგრეთვე, გვინდა აღვნიშნოთ, რომ როგორც წინასწარმა კვლევამ გვიჩვენა, ჩვენს მიერ გამოყენებული სივრცული ცვლადის მიმართ ამონახსნის მიახლოების მიდგომა, შესაძლებელია წარმატებით იქნას გამოყენებული სხვა ფიზიკური შინაარსის ამოცანებში. მაგალითად, პროექციული მეთოდის გამოყენება მიზანშეწონილი აღმოჩნდა დიფუზიის პარაბოლური ინტეგრო-დიფერენციალური არაწრფივი განტოლების მიახლოებითი ამოხსნისა და ალგორითმის სიზუსტის კვლევის შემთხვევაში.

დისერტაციის მოცულობა და სტრუქტურა

წარმოდგენილი დისერტაცია შეიცავს 122 ნაბეჭდ გვერდს. იგი შედგება შესავლის, ორი ნაწილის, ოთხი თავის, დასკვნისა და გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხისაგან, რომელიც შეიცავს 67 დასახელებას.

დისერტაციის შინაარსი

შესავალში განხილულია სადისერტაციო თემის აქტუალობის საკითხი, მოცემულია ამ თემატიკასთან დაკავშირებული სამეცნიერო ლიტერატურის ბიბლიოგრაფიული და ისტორიული მიმოხილვა, გადმოცემულია ნაშრომის შედეგების მოკლე აღწერა.

ნაშრომის პირველი ნაწილი ეთმობა ამოცანებს სიმისათვის. პირველ თავში შესწავლილია ამოცანა სტატიკური სიმისათვის, კერძოდ, ჩიპოს (M.Chipot) მეთოდი და მისი სიზუსტე სტატიკური სიმისათვის. პირველი თავი შედგება ექვსი პარაგრაფისაგან.

§ 1.1 -ში დასმულია ამოცანა კირხჰოფის (G.Kirchhoff) ტიპის სტატიკური სიმისთვის.კერძოდ, განხილულია კირხჰოფის განზოგადოებული განტოლება

$$\varphi\left(\int_0^1 \left(w'(x)\right)^2 dx\right) w''(x) = f(x)\,, \tag{1}$$

$$0 < x < 1\,,$$

სადაც $\varphi(z)$უწყვეტი ან დიფერენცირებადი ფუნქციაა, $0 \le z < \infty$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას$\varphi(z) \ge \alpha > 0, \quad 0 \le z < \infty$.

განტოლება (1) აღწერს სიმის სტატიკურ მდგომარეობას. აქ $w = w(x)$ გადაადგილების საძიებელი ფუნქციაა,$f = f(x)$ ძალის მოცემული ფუნქციაა.

დავუშვათ, სრულდება ერთგვაროვანი სასაზღვრო პირობა

$$w(0) = w(1) = 0\,. \tag{2}$$

განტოლება (1) შეიცავს კირხჰოფის კლასიკურ განტოლებას სტატიკური სიმისათვის

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 \int_0^1 \left(w'(x)\right)^2 dx\right) w''(x) = f(x)\,, \tag{3}$$

$$\alpha_i > 0, \qquad i = 0{,}1\,,$$

როგორც კერძო შემთხვევას და შეესაბამება გადაადგილებისა და ძალის არაწრფივ დამოკიდებულებას, იმ დროს, როცა (3) განტოლება მართებულია ჰუკის კანონის პირობებში.

§ 1.2 -ში ჩამოყალიბებულია (1), (2) ამოცანის ამოხსნის მეთოდი, რომელიც ჩიპოს (Chipot) მიდგომასემყარება.ჩამოვაყალიბოთ მეთოდის არსი. საძიებელი $w(x)$ ფუნქცია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$w(x) = \lambda v(x), \tag{4}$$

სადაც λ და $v(x)$ შესაბამისად საძიებელი პარამეტრი და საძიებელი ფუნქციაა. (4)-ის ჩასმით (1), (2) ამოცანაში და გარკვეული გარდაქმნების შედეგად (1),(2) ამოცანის ამონახსნის პოვნა დაყვანილია ორი ამოცანის

ამოხსნაზე. ჯერ ვხსნით წრფივ სასაზღვრო ამოცანას $v(x)$ ფუნქციის მიმართ $v''(x) = f(x), v(0) = v(1) = 0$, ხოლო შემდეგ ვპოულობთ λ პარამეტრს ტრანსცენდენტული $\lambda\varphi(s\lambda^2) = 1$ განტოლებიდან, სადაც $s = \int_0^1 (v')^2 dx$.

§1.3 -ში მოცემულია ზოგიერთი დამხმარე ფორმულა და გარდაქმნა, რომელიც გვჭირდება $v(x)$ ფუნქციის მიმართ მიღებული წრფივი სასაზღვრო ამოცანის, ასევე λ პარამეტრის მიმართ ტრანსცენდენტული განტოლების ამოსახსნელად. კერძოდ,

$$v(x) = (x-1)\int_0^x \xi f(\xi)d\xi + x\int_x^1 (\xi - 1)f(\xi)d\xi\ , \tag{5}$$

$$s = \int_0^1 \left[\int_0^x \xi f(\xi)d\xi + \int_x^1 (\xi - 1)f(\xi)d\xi\right]^2 dx. \tag{6}$$

§1.4 -ში აღწერილია იტერაციული პროცესები λ პარამეტრის საპოვნელად. რადგან ზოგად შემთხვევაში ტრანსცენდენტური განტოლების ამოხსნა ზუსტად ვერ ხერხდება, ამიტომ უნდა მივმართოთ იტერაციულ პროცესებს. კერძოდ, გამოყენებული გვაქვსა ა) ბისექციის (შუაზე გაყოფის) მეთოდი, თუ $\varphi(z)$ უწყვეტი ფუნქციაა$[a; b]$ ინტერვალზედა ბ) მარტივი იტერაციის მეთოდი, თუ $\varphi(z)$ ფუნქცია დიფერენცირებადია $[a; b]$ ინტერვალზე, სადაც $a = 0$ და $b = \frac{s}{\alpha^2}$. შესაძლებელია აგრეთვე გამოყენებულ იქნეს ნიუტონის, ქორდათა და სხვა იტერაციული მეთოდებიც.

§1.5 -ში დაზუსტებიულია ჩიპოს მეთოდის თვისებები. §1.2.- ში აღწერილი ჩიპოს მეთოდი გვაძლევს (1),(2) ამოცანის ზუსტ ამონახსნს იმ პირობით, რომ ყველა გამოთვლითი ეტაპი ჩატარებული იქნება ცდომილებების გარეშე. მაგრამ უნდა აღვნიშნოთ, რომ ზოგადად, (5) და (6) ინტეგრალების მნიშვნელობები დაითვლება კვადრატურული ფორმულების გამოყენებით, ე.ი. მიახლოებით, ხოლო λ პარამეტრის საპოვნელად ტრანსცენდენტული განტოლება ამოიხსნება იტერაციულად, ე.ი. აგრეთვე მიახლოებით. თავის მხრივ, s პარამეტრის მიახლოებითი მნიშვნელობის

გამოყენება $\lambda\varphi(s\lambda^2) = 1$ განტოლებაში გავლენას ახდენს საძიებელი λ-ს მნიშვნელობაზე. ჩვენ შევისწავლეთ ამ მიზეზების მოქმედება ჩიპოს მეთოდით მიღებულ საბოლოო შედეგზე. ზემოაღნიშნული მეთოდის ცდომილებისათვის მიღებული გვაქვს ისეთი შეფასებები, რომელთა საშუალებით შესაძლებელია წინასწარ არჩეული სიზუსტით (1),(2) ამოცანისათვის ამონახსნის მიღება.

§1.6 -ში ტესტური ამოცანის შემთხვევაში ჩატარებულია რიცხვითი გათვლები. $v(x)$ ფუნქციისა და s პარამეტრის მიახლოებითი მნიშვნელობების მისაღებად (5), (6) ფორმულებში გამოვიყენეთ ტრაპეციის ფორმულა, ხოლო λ პარამეტრის საპოვნელად ტრანსცენდენტული განტოლება ნიუტონის (Newton) იტერაციული მეთოდის საშუალებით ამოვხსენით. ნაშრომში მოყვანილია MATLAB-ის გამოყენებით მიღებული გამოთვლების შედეგები.

მეორე თავში განხილულია ამოცანა დინამიკური სიმისათვის. მეორე თავი შედგება 3 პარაგრაფისგან.

§ 2.1 -ში დასმულია საწყის-სასაზღვროამოცანა კირხჰოფის (G.Kirchhoff) ტიპის დინამიკური სიმისთვის

$$w_{tt}(x,t) - \left(\lambda + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi w_x{}^2(x,t)dx\right) w_{xx}(x,t) + f(x,t) = 0, \qquad (7)$$

$$0 < x < \pi\,, \qquad 0 < t \le T,$$

$$w(x,0) = w^0(x)\,,\ \ w_t(x,0) = w^1(x), \qquad (8)$$

$$w(0,t) = w(\pi,t) = 0, \qquad 0 \le x \le \pi\,, \qquad 0 \le t \le T,$$

სადაც $\lambda > 0$ და Tმოცემული მუდმივებია, ხოლო $f(x,t)$, $w^0(x)$, $w^1(x)$ ცნობილი ფუნქციები. $f(x,t) = 0$ შემთხვევაში (7) წარმოადგენს კირხჰოფის განტოლებას დინამიკური სიმისათვის.

§ 2.2-ში ჩამოყალიბებულია (7), (8) ამოცანის ამოხსნის ალგორითმი, რომელიც შედგება სამი ნაწილისგან.

ალგორითმის პირველი ნაწილი - გალიორკინის მეთოდი. ამონახსნს ვეძებთ სასრული ჯამის სახით

$$w_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} w_{ni}(t) \sin ix \,,$$

სადაც $w_{ni}(t)$ კოეფიციენტები აკმაყოფილებს არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას

$$w''_{ni}(t) + \left(\lambda + \sum_{j=1}^{n} j^2 w_{nj}^2(t)\right) i^2 w_{ni}(t) + f_i(t) = 0 \,, \tag{9}$$

$$i = 1,2,\dots,n, \qquad 0 < t \le T,$$

საწყისი პირობებით

$$w_{ni}(0) = a_i^0 \;, \qquad w'_{ni}(0) = a_i^1 \,, \;\; i = 1,2,\dots,n. \tag{10}$$

აქ

$$f_i(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x,t) \sin ix \, dx \;\;, \quad a_i^p = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} w^p(x) \sin ix \, dx \;\;,$$

$$i = 1,2,\dots,n, \;\; p = 0,1.$$

შემოვიღოთ ფუნქციები

$$u_{ni}(t) = w'_{ni}(t) \;\;, \qquad v_{ni}(t) = i w_{ni}(t) \,, \;\; i = 1,2,\dots,n,$$

და შევცვალოთ (9),(10) სისტემა პირველი რიგის განტოლებათა ეკვივა-ლენტური სისტემით

$$u'_{ni}(t) + \left(\lambda + \sum_{j=1}^{n} v_{nj}^2(t)\right) i v_{ni}(t) + f_i(t) = 0 \,, \tag{11}$$

$$v'_{ni}(t) = i u_{ni}(t) \;\;, \;\; 0 < t < T, \tag{12}$$

$$u_{ni}(0) = a_i^1 \;\;, \qquad v_{ni}(0) = i a_i^0 \,, \;\; i = 1,2,\dots,n. \tag{13}$$

ალგორითმის მეორე ნაწილი - სიმეტრიული სხვაობიანი სქემა. (11)-(13) ამოცანის ამოსახსნელად გამოყენებულია სხვაობიანი მეთოდი. დროის $[0,T]$ ინტერვალზე შემოვიღოთ ბადე $\{t_m|0=t_0<t_1<\cdots<t_m=T\}$ ზოგადად ცვალებადი ბიჯით $\tau_m=t_m-t_{m-1}$, $m=1,2,\ldots,M$. $u_{ni}(t)$ და $v_{ni}(t)$ ფუნქციების მიახლოებითი მნიშვნელობები m-ურ დროის შრეზე, ე.ი. $t=t_m$ -სათვის, $m=0,1,2,\ldots,M$, აღვნიშნოთ u_{ni}^mდა v_{ni}^m-ით. დავუშვათ აგრეთვე, რომ $f_i^m=f_i(t_m)$. გამოვიყენოთ არაცხადი სიმეტრიული სხვაობიანი სქემა

$$\frac{u_{ni}^m-u_{ni}^{m-1}}{\tau_m}+\left\{\lambda+\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\left(v_{nj}^m\right)^2+\left(v_{nj}^{m-1}\right)^2\right)\right]\right\}\frac{v_{ni}^m+v_{ni}^{m-1}}{2}+f_i^m=0\,, \quad (14)$$

$$\frac{v_{ni}^m-v_{ni}^{m-1}}{\tau_m}=i\frac{u_{ni}^m+u_{ni}^{m-1}}{2},\ \ m=1,2,\ldots,M, \qquad i=1,2,\ldots,n, \qquad (15)$$

$$u_{ni}^0=a_i^1\,,\ \ v_{ni}^0=ia_i^0\,, i=1,2,\ldots,n\,. \qquad (16)$$

ალგორითმის მესამე ნაწილი - პიკარის (Picard) ტიპის იტერაციული პროცესი. (14)-(16) არაწრფივ განტოლებათა სისტემის ამოსახსნელად გამოვიყენეთ იტერაციული პროცესი, ამასთან თვლა ვაწარმოოთ შრიდან შრეზე გადასვლით. u_{ni}^m და v_{ni}^m k-ური იტერაციული მიახლოებები აღვნიშნოთ $u_{ni}^{m,k}$ და $v_{ni}^{m,k}$ -თი, $k=0,1,\ldots$.გამოვიყენოთ შემდეგი იტერაციული მეთოდი

$$u_{ni}^{m,k}=u_{ni}^{m-1,k_0}-\frac{\tau_m i}{2}\times$$

$$\times\left\{\lambda+\frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(\left(v_{nj}^{m,k-1}\right)^2+\left(v_{nj}^{m-1,k_0}\right)^2\right)\right]\right\}\left(v_{nj}^{m,k-1}+v_{nj}^{m-1,k_0}\right)\ -\tau_m f_i^m, \qquad (17)$$

$$v_{ni}^{m,k}=v_{ni}^{m-1,k_0}+\frac{\tau_m i}{2}\left(u_{ni}^{m,k-1}+u_{ni}^{m-1,k_0}\right), \qquad (18)$$

სადაც k_0-ით აღნიშნულია $m-1$ შრეზე ჩატარებული იტერაციების რაოდენობა.

(17),(18) ფორმულები წარმოადგენს განხილული ალგორითმის საბოლოო სახეს. $v_{ni}^{m,k}$ კომპონენტები გამოიყენება (7),(8) ამოცანის ზუსტი ამონახსნის მიახლოებითი მნიშვნელობის ასაგებად. სახელდობრ, სასრული ჯამი $\sum_{i=1}^{n} w_{ni}^{m,k} \sin ix$, სადაც $w_{ni}^{m,k} = \frac{1}{i} v_{ni}^{m,k}$, გვაძლევს ზუსტი ამონახსნის $w(x, t_m)$ მნიშვნელობის მიახლოებას.

§2.3 -ში (7), (8) ტიპის ერთი ტესტური ამოცანა ამოხსნილია § 2.2-ში აღწერილი ალგორითმის საშუალებით. ჩატარებულია რიცხვითი გათვლები პროგრამათა სისტემა Maple-ს გამოყენებით. მიღებული შედეგები წარმოდგენილია ცხრილებისა და გრაფიკების სახით.

ნაშრომის მეორე ნაწილში განხილულია ამოცანები ძელისათვის. მესამე თავში შესწავლილია ამოცანა დინამიკური ძელისათვის, კერძოდ, აღწერილია მიახლოებითი ალგორითმი ჯ. ბოლის (J.Ball) არაწრფივი დინამიკური ძელისთვის. შესწავლილია გალიორკინის მეთოდის, სხვაობიანი სქემისა და იტერაციული მეთოდის კრებადობის პირობები, ასევე შეფასებულია შესაბამისი ცდომილობები. მესამე თავიშედგება ოთხი პარაგრაფისაგან.

§ 3.1-ში დასმულია ამოცანა ტიმოშენკოს(S.Timoshenko) ტიპის დინა-მიკური ძელისთვის, კერძოდ, დასმულია შემდეგი სახის საწყის-სასაზღვრო ამოცანა ჯ. ბოლის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებისთვის

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + \delta \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \gamma \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t}(x,t) + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) -$$

$$-\left(\beta + \rho \int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dx\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) -$$

$$-\sigma \left(\int_0^L \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x,t) dx\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0\,, \qquad (19)$$

$$0 < x < L, 0 < t \le T,$$

$$u(x,0) = u^0(x)\ ,\ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u^1(x),$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) = 0\,, \tag{20}$$

$$0 \le x \le L, 0 \le t \le T,$$

სადაც α, γ, ρ და σ დადებითი, ხოლო β და δ ნიშანგანუსაზღვრელი მოცემული მუდმივებია. $u^0(x) \in W_2^2(0,L)$ და $u^1(x) \in L_2\,(0,L)$ მოცემული ფუნქციებია, ამასთან $u^0(0) = u^1(0)\ = u^0(L) = u^1(L) = 0.$ (19) განტოლება, რომელიც ს.ტიმოშენკოს თეორიაზე დაყრდნობითაა მიღებული ჯ.ბოლის მიერ, აღწერს ძელის რხევას. ძელისათვის კირხჰოფის ტიპის განტოლებებიდან ეს საკმაოდ ზოგადი სახის განტოლებაა.

დავუშვათ, რომ $|\delta| < \gamma\left(\frac{\pi}{L}\right)^4$, თუ $\delta < 0$, და $\alpha\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 > |\beta|$, როცა $\beta < 0$.

ვთქვათ, არსებობს (19),(20) ამოცანის ამონახსნი $u(x,t) \in W_2^2\big((0,L)\times(0,T)\big)$.

შევნიშნოთ, რომ (19) განტოლების ამოხსნადობის საკითხი გამოკვლეულია თვით ჯ. ბოლის მიერნაშრომში Ball J., Stability theory for an extensible beam, J. Diff. Eq., 14, 399-418, 1973. შევჩერდეთ ჩვენს მიერ მიღებულ შედეგზე.

§3.2 -ში ჯ.ბოლის დინამიკური ძელისათვის აგებული ალგორითმი შეიცავს სამ ნაწილს - გალიორკინის მეთოდს, სხვაობიან სქემას და იაკობის (Jacobi) იტერაციას. შესწავლილი გვაქვს ალგორითმის სამივე ნაწილის, გალიორკინის მეთოდის, სხვაობიანი სქემისა და იტერაციული მეთოდის, ცდომილების საკითხები.

§3.2.1. გალიორკინის მეთოდი. (19),(20) ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ სასრული ჯამის სახით

$$u_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} u_{ni}(t)\sin\frac{i\pi x}{L}\ \ , \tag{21}$$

სადაც$u_{ni}(t)$კოეფიციენტები აკმაყოფილებს ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას

$$u_{ni}''(t)+\left(\delta+\gamma\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\right)u_{ni}'(t)+\left\{\alpha\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4+\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\times\right.$$

$$\left.\times\left[\left(\beta+\rho\frac{L}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2u_{nj}^2(t)\right)+\sigma\frac{L}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2u_{nj}(t)u_{nj}'(t)\right]\right\}u_{ni}(t)=0, \qquad (22)$$

$$i=1,2,\dots,n,\ 0<t\le T,$$

საწყისი პირობებით

$$u_{ni}(0)=a_i^0,\ \ u_{ni}{}'(0)=a_i^1,\ i=1,2,\dots,n, \qquad (23)$$

$$a_i^p=\frac{2}{L}\int_0^L u^p(x)\sin\frac{i\pi}{L}x\,dx\,,\quad i=1,2,\dots,n,\qquad p=0,1.$$

§3.2.2.სხვაობიანი სქემა. (22), (23) ამოცანის ამოსახსნელად შეიძლება გამოვიყენოთ სხვაობიანი მეთოდი. დროის [0,T] ინტერვალზე შემოვიღოთ ბიჯი $\tau=\frac{T}{M}$ და კვანძები $t_m=m\tau\,, m=0,1,2,\dots,M$. $u_{ni}(t)$ ფუნქციის მიახლოებითი მნიშვნელობა m-ურ შრეზე, ე.ი. $t=t_m$-სათვის, აღვნიშნოთ u_{ni}^m-ით. გამოვიყენოთ შემდეგი სახის სხვაობიანი სქემა

$$\frac{u_{ni}^{m+1}-2u_{ni}^m+u_{ni}^{m-1}}{\tau^2}+\left(\delta+\gamma\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\right)\frac{u_{ni}^{m+1}-u_{ni}^{m-1}}{2\tau}+$$

$$+\left\{\alpha\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4+\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\beta+\rho\frac{L}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\left[\left(\frac{u_{nj}^{m+1}+u_{nj}^m}{2}\right)^2+\left(\frac{u_{nj}^m+u_{nj}^{m-1}}{2}\right)^2\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sigma\frac{L}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2\frac{u_{nj}^{m+1}+2u_{nj}^m+u_{nj}^{m-1}}{4}\frac{u_{nj}^{m+1}-u_{nj}^{m-1}}{2\tau}\right)\right\}\times$$

$$\times\frac{u_{ni}^{m+1}+2u_{ni}^m+u_{ni}^{m-1}}{4}=0\,, \qquad (24)$$

$$m = 1,2,\dots,M-1, \quad i = 1,2,\dots,n,$$

$$u_{ni}^0 = a_i^0\,, \qquad \frac{u_{ni}^1 - u_{ni}^0}{\tau} = a_i^1 + \frac{\tau}{2}a_i^2\,, \qquad i = 1,2,\dots,n, \tag{25}$$

$$a_i^2 = -\left\{\left(\delta + \gamma\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\right)a_i^1 + \right.$$

$$\left. + \left[\alpha\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 + \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left(\beta + \rho\frac{L}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 {a_j^0}^2 + \sigma\frac{L}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 a_j^0 a_j^1\right)\right]a_i^0\right\}.$$

§3.2.3.იტერაციული მეთოდი. შემოვიღოთ აღნიშვნები

$$y_{ni}^m = \frac{u_{ni}^{m+1} - u_{ni}^m}{\tau}\,, \qquad z_{ni}^m = \frac{i\pi}{L}\frac{u_{ni}^{m+1} + u_{ni}^m}{2}, \;\; i = 1,2,\dots,n,$$

და მათი გამოყენებით (24), (25) სისტემა შევცვალოთ შემდეგი სისტემით

$$\frac{y_{ni}^m - y_{ni}^{m-1}}{\tau} + \left(\delta + \gamma\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\right)\frac{y_{ni}^m + y_{ni}^{m-1}}{2} +$$

$$+\left\{\alpha\left(\frac{i\pi}{L}\right)^3 + \frac{i\pi}{L}\left(\beta + \rho\frac{L}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(z_{nj}^m\right)^2 + \left(z_{nj}^{m-1}\right)^2}{2} + \right.\right. \tag{26}$$

$$\left.\left. +\sigma\frac{L}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{j\pi}{L}\frac{\left(y_{nj}^m + y_{nj}^{m-1}\right)\left(z_{nj}^m + z_{nj}^{m-1}\right)}{4}\right)\right\}\frac{z_{ni}^m + z_{ni}^{m-1}}{2} = 0\,,$$

$$\frac{z_{ni}^m - z_{ni}^{m-1}}{\tau} = \frac{i\pi}{L}\frac{y_{ni}^m + y_{ni}^{m-1}}{2},$$

$$m = 1,2,\dots,M, \quad i = 1,2,\dots,n,$$

პირობებით

$$y_{ni}^0 = a_i^1 + \frac{\tau}{2}a_i^2\,, \qquad z_{ni}^0 = \frac{i\pi}{L}\left(a_i^0 + \frac{1}{2}\tau a_i^1 + \frac{1}{4}\tau^2 a_i^2\right)\,, \qquad i = 1,2,\dots,n. \tag{27}$$

(26),(27) სისტემა ამოვხსნათ შრიდან შრეზე გადასვლით. აღნიშნული ნათქვამი ნიშნავს შემდეგს: ვთქვათ $m-1$ შრეზე ამონახსნი ნაპოვნია, მაშინ

შემდეგ, ანუ m-ურ შრეზე, ამონახსნის მისაღებად გამოიყენება იტერაციული მეთოდი. ჩვენი არჩევანი შევაჩეროთიაკობის იტერაციულ მეთოდზე. სიმარტივისათვის უგულებელვყოთ $m-1$ შრეზე იტერაციული პროცესის საბოლოო ცდომილება. აქედან გამომდინარე, m-ურ შრეზე გამოთვლები უნდა ჩატარდეს შემდეგი ფორმულების მიხედვით

$$\frac{y_{ni,k+1}^{m}-y_{ni}^{m-1}}{\tau}+\left(\delta+\gamma\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{4}\right)\frac{y_{ni,k+1}^{m}+y_{ni}^{m-1}}{2}+$$

$$+\left\{\alpha\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{3}+\frac{i\pi}{L}\left(\beta+\rho\frac{L}{2}\frac{\left(z_{ni,k+1}^{m}\right)^{2}+(z_{ni}^{m-1})^{2}}{2}+\rho\frac{L}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{\left(z_{nj,k}^{m}\right)^{2}+\left(z_{nj}^{m-1}\right)^{2}}{2}+\right.\right.$$

$$+\sigma\frac{L}{2}\frac{i\pi}{L}\frac{\left(y_{ni,k+1}^{m}+y_{ni}^{m-1}\right)\left(z_{ni,k+1}^{m}+z_{ni}^{m-1}\right)}{4}+ \tag{28}$$

$$\left.\left.+\sigma\frac{L}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{j\pi}{L}\frac{\left(y_{nj,k}^{m}+y_{nj}^{m-1}\right)\left(z_{nj,k}^{m}+z_{nj}^{m-1}\right)}{4}\right)\right\}\frac{z_{ni,k+1}^{m}+z_{ni}^{m-1}}{2}=0\,,$$

$$\frac{z_{ni,k+1}^{m}-z_{ni}^{m-1}}{\tau}=\frac{i\pi}{L}\frac{y_{ni,k+1}^{m}+y_{ni}^{m-1}}{2}\,, \tag{29}$$

$$m=1,2,\dots,M,\quad i=1,2,\dots,n,$$

სადაც $y_{ni,k+p}^{m}$და$z_{ni,k+p}^{m}$ აღნიშნულია y_{ni}^{m} და $z_{ni}^{m}(k+p)$-ური იტერაციული მიახლოებები, $i=1,2,\dots,n,$ $p=0,1$, y_{ni}^{m-1} და z_{ni}^{m-1} ცნობილი სიდიდეებია, ხოლო y_{ni}^{0} და z_{ni}^{0}-სათვის მართებულია (27).

(29) ფორმულიდან გამომდინარეობს

$$y_{ni,k+1}^{m}=-y_{ni}^{m-1}+2\frac{L}{i\pi}\frac{z_{ni,k+1}^{m}-z_{ni}^{m-1}}{\tau}\,. \tag{30}$$

(30) გამოსახულების (28)-ში ჩასმის შედეგად გვექნება

$$\frac{1}{\tau}\left(-y_{ni}^{m-1}+2\frac{L}{i\pi}\frac{z_{ni,k+1}^{m}-z_{ni}^{m-1}}{\tau}\right)-\frac{y_{ni}^{m-1}}{\tau}+\left(\delta+\gamma\left(\frac{i\pi}{L}\right)^{4}\right)\frac{L}{i\pi}\frac{z_{ni,k+1}^{m}-z_{ni}^{m-1}}{\tau}+$$

$$+\left\{\alpha\left(\frac{i\pi}{L}\right)^3+\frac{i\pi}{L}\left(\beta+\rho\frac{L}{2}\frac{\left(z_{ni,k+1}^m\right)^2+\left(z_{ni}^{m-1}\right)^2}{2}+\rho\frac{L}{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{\left(z_{nj,k}^m\right)^2+\left(z_{nj}^{m-1}\right)^2}{2}+\right.\right.$$

$$+\sigma\frac{L}{4}\frac{z_{ni,k+1}^m+z_{ni}^{m-1}}{\tau}\left(z_{ni,k+1}^m+z_{ni}^{m-1}\right)+ \tag{31}$$

$$\left.\left.+\sigma\frac{L}{4}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{z_{nj,k}^m-z_{nj}^{m-1}}{\tau}\left(z_{nj,k}^m+z_{nj}^{m-1}\right)\right)\right\}\frac{z_{ni,k+1}^m+z_{ni}^{m-1}}{2}=0\,,$$

$$k=0,1,\dots,\quad i=1,2,\dots,n.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ იტერაციული პროცესის ჩასატარებლად საკმარისია თვლა ვაწარმოოთ მხოლოდ (31) ფორმულის მიხედვით. $z_{ni,k+1}^m$ საბოლოო იტერაციული აპროქსიმაციის გამოთვლის შემდეგ მისი მნიშვნელობა უნდა ჩავსვათ (30) ფორმულაში y_{ni}^m სიდიდისათვის, $i=1,2,\dots,n$, m-ურ შრეზე საბოლოო მიახლოების მიღების მიზნით.

იტერაციის დაჩქარებას ხელს უწყობს შემდეგი მოსაზრება. (31) ფორმულიდან ვასკვნით, რომ $(k+1)$ იტერაციულ ბიჯზე ყოველი i-სათვის გვიხდება $z_{ni,k+1}^m$ სიდიდის მიმართ კუბური განტოლების ამოხსნა. ამიტომ, თუ ვისარგებლებთ კარდანოს (Cardano) ფორმულით, მივიღებთ ცხადი სახის გამოსახულებას საძიებელი $z_{ni,k+1}^m$ სიდიდესათვის. სახელდობრ, გვექნება

$$z_{ni,k+1}^m=-\frac{z_{ni}^{m-1}}{3}+\sum_{p=1}^{2}(-1)^{p+1}\sigma_{i,p}\;, \tag{32}$$

$$k=0,1,\dots,\quad i=1,2,\dots,n,$$

სადაც

$$\sigma_{i,p}=\left[(-1)^p\frac{s_i}{2}+\left(\frac{s_i^2}{4}+\frac{r_i^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

და $\sigma_{i,p}$-ში შემავალი s_i დაr_iკოეფიციენტები ცხადად გამოისახება ამოცანის მექანიკური $\alpha,\ \beta,\gamma,\ \delta,\ \rho,\ \sigma$ პარამეტრებითა და $y_{ni}^{m-1},\ z_{ni}^{m-1},\ z_{nj,k}^{m},\ j\neq i$ სიდიდეებით.

ამრიგად, (19),(20) ამოცანის ამოხსნის აქ განხილული ალგორითმი დაყვანილია (32) ფორმულის რეალიზებაზე. $z_{ni,k}^{m}$ სიდიდეების, $i=1,2,\dots,n$, გამოთვლის შემდეგ შესაძლებელია $u(x,t)$ ამონახსნის k-ური მიახლოების აგება დროის $t=t_m$ მომენტისათვის. როგორც (21) და y_{ni}^{m}, z_{ni}^{m} - სათვის ფორმულებიდან გამომდინარეობს, ამ მიახლოებას წარმოადგენს ჯამი

$$u_{n,k}^{m}(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\tau y_{ni,k}^{m-1}+2\frac{L}{i\pi}z_{ni,k}^{m-1}\right)\sin\frac{i\pi x}{L}\,. \tag{33}$$

§3.3-ში განხილულია ალგორითმის სიზუსტის საკითხები. შესწავლილი გვაქვს ალგორითმის სამივე ნაწილის სიზუსტე. წარმოვადგინოთ შესაბამისი შედეგები ისეთი სისრულით, რომლითაც დაცული იქნება ავტორეფერატის ფორმატი.

§3.3.1. გალიორკინის მეთოდის ცდომილება. თუ $u^0(x)\in W_2^2(0,L)$ და $u^1(x)\in L^2(0,L)$, მაშინ არსებობს (19),(20) ამოცანის $u(x,t)\in L^\infty\big(0,T;W_2^2(0,L)\big)$ ამონახსნი, რომლისთვისაც მართებულია გაშლა

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}u_i(t)\sin\frac{i\pi x}{L}\,, \tag{34}$$

რომლის კოეფიციენტები აკმაყოფილებს განტოლებათა სისტემას

$$u_i''(t)+\ \left(\delta+\gamma\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4\right)u_i'(t)+\left\{\alpha\left(\frac{i\pi}{L}\right)^4+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2\left[\left(\beta+\rho\frac{L}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2u_j^2(t)\right)+\sigma\frac{L}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2u_j(t)u_j'(t)\right]\right\}u_i(t)=0,$$

$$i=1,2,\dots,\quad 0<t\le T,$$

საწყისი პირობებით

$$u_i(0) = a_i^0, \qquad u_i'(0) = a_i^1, \quad i = 1,2, \ldots.$$

(21) და (34) ფორმულების გათვალისწინებით, გალიორკინის მეთოდის ცდომილება (ცდომილების მთავარი ნაწილი) განვსაზღვროთ როგორც სხვაობა

$$\Delta u_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \big(u_{ni}(t) - u_i(t)\big) \sin\frac{i\pi x}{L}.$$

თეორემა 1. გალიორკინის მეთოდის ცდომილებისათვის მართებულია შეფასება

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Delta u_n(x,t)\right\|_{L_2(0,L)}^2 + \alpha \left\|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta u_n(x,t)\right\|_{L_2(0,L)}^2 \leq$$

$$\leq c_1 \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} (a_i^1)^2 + \alpha \sum_{i=n+1}^{\infty} \left(\frac{i\pi}{L}\right)^4 (a_i^0)^2 \right)^2, 0 < t \leq T,$$

სადაცდადებითი c_1 მუდმივა გამოისახება გარკვეული ფორმულით, რომელიც შეიცავს (19), (20) ამოცანის პარამეტრებს.

ამ შედეგის დასამტკიცებლად გამოყენებულია აპრიორული შეფასების მეთოდი.

§3.3.2. სხვაობიანი სქემის სიზუსტე. ჩვენი მიზანი (24),(25) სქემის სიზუსტის შესწავლაშიმდგომარეობს.სხვაობიანი სქემის ცდომილება t_mკვანძში განვსაზღვროთ შემდეგნაირად

$$\Delta u_{ni}^m = u_{ni}^m - u_{ni}(t_m), \quad i = 1,2, \ldots, n.$$

რამდენიმე დამხმარე უტოლობის, მატრიცული სახით ჩაწერილ ცდომილებების განტოლებათა სისტემისთვის შერმან-მორისონის ფორმულისა და ლემების (11 ლემა) გამოყენების შედეგად სხვაობიანი სქემის ცდომილებებისთვის დამტკიცებულია შემდეგი შეფასება.

თეორემა 2. ვთქვათ τ ბიჯი აკმაყოფილებს (19) განტოლების კოეფიციენტების საშუალებით ჩაწერილ სიმცირის გარკვეულ პირობებს, მაშინ (24), (25) სხვაობიანი სქემის ცდომილებისათვის სრულდება შეფასება

$$\sum_{i=1}^{n}|\Delta u_{ni}^{m}| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\Delta u_{ni}^{m}-\Delta u_{ni}^{m-1}}{\tau}\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\Delta u_{ni}^{m}+\Delta u_{ni}^{m-1}}{2}\right| \leq$$

$$\leq \alpha_1\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\psi_{ni}^{0}\right| + \alpha_2 \max_{1\leq k\leq m-1}\sum_{i=1}^{n}\left|\psi_{ni}^{k}\right|\right) \leq c_2\tau^2\,, \qquad m = 2,3,\dots,M,$$

სადაც α_1 , α_2 მუდმივები დამოკიდებული არიან τ ბიჯზე და მოცემული ამოცანის ფიზიკურ და გეომეტრიულ პარამეტრებზე, ხოლო ψ_{ni}^{m}- (24) განტოლების, $m = 1,2,\dots,M-1, \psi_{ni}^{0}$ კი - (25)-ის მეორე საწყისი პირობის აპროქსიმაციის ცდომილებებია. მიღებულია ფორმულა c_2 კოეფიციენტის-თვისაც.

§3.3.3. იტერაციული მეთოდის ცდომილება. იტერაციული მეთოდის ცდომილება $\Delta u_{n,k}^{m}(x)$ განვსაზღვროთ, როგორც სხვაობა (33) და

$$u_n^m(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\tau y_{ni}^{m-1} + 2\frac{L}{i\pi}z_{ni}^{m-1}\right)\sin\frac{i\pi x}{L} \qquad (35)$$

ჯამებს შორის. (35) წარმოადგენს (26),(27) სხვაობიანი სქემის რეალიზების შედეგად $u(x,t)$ ფუნქციის $t = t_m$-სათვის მიღებულ მიახლოებით მნიშვნე-ლობას. განსაზღვრებიდან და (26)-დან გამომდინარეობს

$$\Delta u_{n,k}^{m}(x) = u_{n,k}^{m}(x) - u_n^m(x) = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{L}{i\pi}\left(z_{ni,k}^{m} - z_{ni}^{m}\right)\sin\frac{i\pi x}{L}\,. \qquad (36)$$

შემოვიღოთ ვექტორები $z_{n,k}^{m} = \left(z_{ni,k}^{m}\right)_{i=1}^{n}$, $k = 0,1,\dots$, $z_n^m = (z_{ni}^m)_{i=1}^n$ და ვექტორული ნორმა $\|v\| = \sum_{i=1}^{n}|v_i|$, სადაც $v = (v_i)_{i=1}^{n}$.

ჩამოვაყალიბოთ დებულება იტერაციული მეთოდის კრებადობის შესახებ.

თეორემა 3. ვთქვათ,τ ბიჯი აკმაყოფილებს გარკვეულ პირობებს, რომელთა შესრულება შესაძლებელია τ ბიჯის შემცირების ხარჯზე. მაშინ (32)

იტერაციული მეთოდი კრებადია, $\lim_{k\to\infty} z_{ni,k}^m = z_{ni}^m$, $i = 1,2,\dots,n$, ამასთან კრებადობის რიგი განისაზღვრება ვექტორული უტოლობით

$$\left\| z_{n,k}^m - z_n^m \right\| \le \frac{q^k}{1-q} \left\| z_{n,1}^m - z_{n,0}^m \right\|,$$

სადაც $0 < q < 1$.

ამ გამოსახულების (36) ფორმულასთან ერთად გამოყენების შედეგად მიიღება იტერაციული მეთოდის ცდომილების შემდეგი შეფასება

$$\left\| \frac{d^p}{dx^p} \Delta u_{n,k}^m(x) \right\|_{L^2(0,L)} \le c_3 q^k \ ,$$

$$p = 0,1, \quad m = 1,2,\dots,M, \quad k = 1,2,\dots \ ,$$

სადაც $c_3 = \left(\frac{L}{\pi}\right)^{1-p} \sqrt{2L} \frac{1}{1-q} \left\| z_{n,1}^m - z_{n,0}^m \right\|$.

§3.4-ში წარმოდგენილია ჩატარებული რიცხვითი გამოთვლების შედეგები. ჩვენს მიერ ჯ.ბოლის განტოლებისათვის აგებული ალგორითმის თვისებების გამოვლინების მიზნით, ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში, შედგენილია შესაბამისი კომპიუტერული პროგრამა და რეალიზებულია რამდენიმე ტესტური მაგალითი.

მეოთხე თავში შესწავლილია კირხჰოფის ტიპის სტატიკური ძელის მიახლოებითი ამოხსნის საკითხი. მეოთხე თავი შედგება ხუთი პარაგრაფისგან.

§ 4.1-ში დასმულია ამოცანა კირხჰოფის ტიპის სტატიკური ძელისთვის. განვიხილოთ სტატიკური ძელისთვის კირხოფის ტიპის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლება

$$u''''(x) - m\left(\int_0^l {u'}^2(x)dx\right)u''(x) = f\big(x, u(x), u'(x)\big), \qquad (37)$$

$$0 < x < l$$

პირობებით

$$\mathrm{u}(0)=\mathrm{u}(l)=0, \qquad u''(0)=u''(l)=0. \tag{38}$$

აქ $u=u(x)$ არის l სიგრძის ძელის გადაადგილების ფუნქცია, ძელზე მოქმედი ძალა მოიცემა ფუნქციით $f\big(x,u(x),u'(x)\big)$, ფუნქცია $m(z)\geq\alpha>0,\ 0\leq z<\infty$,

აღწერს კავშირს ძაბვასა და დეფორმაციას შორის. სახელდობრ, თუ $m(z)$ ფუნქცია წრფივია, მაშინ კავშირი შეესაბამება ჰუკის წრფივ კანონს, ხოლო სხვა შემთხვევაში ეს კავშირი არაწრფივი სახისაა.

იმისათვის, რომ მივიღოთ (37), (38) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი, აქ ჩვენ გამოყენებული გვაქვს მიდგომა, რომელიც დიდი ალბათობით სხვა მკვლევარებს (37) განტოლების ამოსახსნელად არ გამოუყენებიათ. ეს მიდგომა მდგომარეობს იმაში, რომ გრინის ფუნქციის გამოყენებით (37), (38) ამოცანა დაიყვანება არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებაზე, რომლის ამოსახსნელადაც ვიყენებთ იტერაციულ მეთოდს. დადგენილია მეთოდის კრებადობის პირობა და შეფასებულია მისი სიზუსტე.

§4.2-ში წარმოდგენილია ზემოაღნიშნული ამოცანის ამოხსნისა და კვლევისათვის საჭირო გარკვეული დაშვებები და შეზღუდვები, რომლებიც ედება $m(z)$ და $f(x,u,v)$ ფუნქციებს, ასევე l ძელის სიგრძეს.

§4.3-ში გადმოცემულია მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდი. დავუშვათ, არსებობს (37), (38) ამოცანის ამონახსნი და $u(x)\in W_0^{2,2}(0,l)$. გრინის ფუნქციების გამოყენებით და გარკვეული გარდაქმნების შედეგად (37), (38) ამოცანა დაიყვანება არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებამდე

$$u(x)=\int_0^l G(x,\xi)f\big(\xi,u(\xi),u'(\xi)\big)d\xi\,, \qquad 0<x<l, \tag{39}$$

სადაც

$$G(x,\xi) =$$

$$= \frac{1}{\tau}\begin{cases} \frac{1}{l}(l-x)\xi + \frac{1}{\sqrt{\tau}sinh(\sqrt{\tau}l)}sinh\left(\sqrt{\tau}(x-l)\right)sinh(\sqrt{\tau}\xi), & 0<\xi\le x<l, \\ \frac{1}{l}x(l-\xi) + \frac{1}{\sqrt{\tau}sinh(\sqrt{\tau}l)}sinh\left(\sqrt{\tau}(\xi-l)\right)sinh(\sqrt{\tau}x), & 0<x\le\xi<l, \end{cases}$$

$$\tau = m\left(\int_0^l u'^2(x)dx\right).$$

(39) განტოლება ამოვხსნათ პიკარის (Picard) იტერაციული მეთოდის საშუალებით. $u_0(x)$, $0\le x\le l$, ფუნქციის შერჩევის შემდეგ, რომელიც თავის მეორე რიგის წარმოებულთან ერთად ნულის ტოლი ხდება $x=0$ და $x=l$ წერტილებში, ვპოულობთ მომდევნო მიახლოებებს შემდეგი ფორმულის გამოყენებით

$$u_{k+1}(x) = \int_0^l G_k(x,\xi)f\left(\xi,u_k(\xi),u_k'(\xi)\right)d\xi, \qquad 0<x<l, \qquad k=0,1,\dots,$$

სადაც

$$G_k(x,\xi) =$$

$$= \frac{1}{\tau_k}\begin{cases} \frac{1}{l}(l-x)\xi + \frac{1}{\sqrt{\tau_k}sinh(\sqrt{\tau_k}l)}sinh\left(\sqrt{\tau_k}(x-l)\right)sinh(\sqrt{\tau_k}\xi), & 0<\xi\le x<l, \\ \frac{1}{l}x(l-\xi) + \frac{1}{\sqrt{\tau_k}sinh(\sqrt{\tau_k}l)}sinh\left(\sqrt{\tau_k}(\xi-l)\right)sinh(\sqrt{\tau_k}x), & 0<x\le\xi<l, \end{cases}$$

$$\tau_k = m\left(\int_0^l u_k'^2(x)dx\right), k=0,1,\mathrm{K}.$$

§4.4 -ში შეფასებულია მეთოდის ცდომილება.

§4.4.1-ში გამოწერილია განტოლება მეთოდის ცდომილებისათვის. მიზანს წარმოადგენს მეთოდის ცდომილების შეფასება, რომლის ქვეშ გვესმის სხვაობა მიახლოებითსა და ზუსტ ამონახსნებს შორის

$$\delta u_k(x) = u_k(x) - u(x), \quad k=0,1,\mathrm{K}.$$

§4.4.2 -ში მოყვანილია დამხმარე უტოლობები და ლემები (5 ლემა).

§4.4.3 -ში გამოკვლეულია მეთოდის კრებადობის საკითხი.

შემოვიღოთ ნორმა $W_0^{2,2}(0,l)$ -ში $\|u(x)\|_p = (\int_0^l (\frac{d^p u}{dx^p}(x))^2 dx)^{\frac{1}{2}}, \; p = 0,1.$

თეორემა. ვთქვათ, სრულდება გარკვეული მოთხოვნები, რომლებიც შეეხება $m(z)$, $f(x,u,v)$ ფუნქციებს. დაუშვათ, გარდა ამისა $m(z)$, $f(x,u,v)$ ფუნქციებზე და l ძელის სიგრძეზე დამოკიდებული მუდმივა q ნაკლებია 1-ზე, მაშინ პიკარის იტერაციული მეთოდის მიახლოებები იკრიბება (37), (38) ამოცანის ზუსტი ამონახსნისკენ, ხოლო ცდომილებისთვის სრულდება შემდეგი შეფასება

$$\|u_k(x) - u(x)\|_p \le (\frac{l}{\pi})^{1-p} q^k \|u_0(x) - u(x)\|_1, \quad k = 1,2,\ldots, \; p = 0,1.$$

§4.5-ში მოყვანილია რიცხვითი გათვლების შედეგები.

(37), (38) სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისთვის გამოყენებულია პროგრამათა სისტემა Maple. (39) ინტეგრალური განტოლების პიკარის იტერაციული მეთოდით მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმი აპრობირებულია ტესტურ მაგალითებზე, მიღებული შედეგები წარმოდგენილია ცხრილებისა და გრაფიკების სახით.

სადისერტაციო ნაშრომი მთავრდება დასკვნითა და ციტირებული ლიტერატურის სიით.

დასკვნა

გიორგი პაპუკაშვილის სადისერტაციო ნაშრომი „ზოგიერთი კლასის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდების აგება და კვლევა“ ეძღვნება გამოთვლითი მექანიკის ზოგიერთ საკითხს. აგებულია სტატიკური და დინამიკური სიმებისა და ძელებისათვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის რამდენიმე ეფექტური ალგორითმი. დაწვრილებით გამოკვლეულია ალგორითმების თვისებები, შესწავლილია მათი კრებადობის პირობები. ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტი აღნიშნული ალგორითმების პრაქტიკული თვისებების გამოსავლენად. სადისერტაციო ნაშრომში მოხერხდა ამ ალგორითმების თეორიული და პრაქტიკული ასპექტების დადგენა.

სადოქტორო დისერტაციის პირველ ნაწილში შესწავლილია ამოცანები, როგორც სტატიკური, ასევე დინამიკური სიმისთვის. განხილულია კირხჰოფის ტიპის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები. პირველ თავში დაწვრილებითაა გამოკვლეული სტატიკური სიმის ამოხსნის ცნობილი შვეიცარიელი მათემატიკოსის ჩიპოს მეთოდის გამოყენების პრაქტიკული ასპექტები. ჩვენს მიერ მიღებული შედეგები საშუალებას იძლევა წინასწარ დადგინდეს, თუ რა სიზუსტით უნდა ჩატარდეს აღნიშნული მეთოდის ყველა გამოთვლითი საფეხური, რათა საბოლოო შედეგი შეესაბამებოდეს დასახულ სიზუსტეს. ნაშრომის მეორე თავში, სიმის დინამიკური ამოცანისთვის, აპრობირებულია რამდენიმე გამოთვლითი ალგორითმი ტესტურ ამოცანებზე, ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტი და გაკეთებულია გარკვეული დასკვნები ალგორითმების ეფექტურობაზე.

ნაშრომის მეორე ნაწილში შესწავლილია ამოცანები, როგორც დინამიკური, ასევე სტატიკური ძელისათვის. ნაშრომის მესამე თავი ეძღვნება ტიმოშენკოს ტიპის რთული არაწრფივობის მქონე დინამიკური ძელის ყოფაქცევის ამოცანის ამოხსნას ჩვენს მიერ აგებული ალგორითმით. შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული განტოლება თავისი ზოგადობით შეიცავს, როგორც კერძო შემთხვევას, ვოინოვსკი-კრიგერის ძელის ცნობილ განტოლებას და ზოგიერთ სხვა მოდელს. ჩვენს მიერ აგებული ალგორითმი იძლევა მიახლოებას როგორც სივრცული, ასევე დროითი ცვლადის მიმართ. შედეგად, მიღებულ დისკრეტულ განტოლებათა სისტემისთვის აგებულია ალგორითმი, რომელშიც გათვალისწინებულია მოდელის არაწრფივი სტრუქტურა, სახელდობრ, კუბური. შესაბამისად, იტერაციული პროცესის გასამარტივებლად ალგორითმის ამ ნაწილში კარდანოს ფორმულის გამოყენებით გარკვეულწილად მოხერხდა ალგორითმის ოპტიმიზაცია, რაც პოზიტიურად აისახა ჩასატარებელი იტერაციების რაოდენობაზე. საჭირო სიზუსტის მისაღწევად, აღნიშნული მიდგომა იწვევს იტერაციათა რაოდენობის შემცირებას. დისერტაციის მეოთხე თავში შესწავლილია სტატიკური ძელისთვის კირხჰოფის ტიპის არაწრფივი ინტეგრო-

დიფერენციალური განტოლების მიახლოებითი ამოხსნის საკითხი. გამოყენებული გვაქვს მიდგომა, რომლითაც გრინის ფუნქციების გამოყენებით მოცემული ამოცანა დაიყვანება არაწრფივ ინტეგრალურ განტოლებაზე, რომლის ამოსახსნელადაც ვიყენებთ პიკარის იტერაციულ მეთოდს. დადგენილია მეთოდის კრებადობის პირობა და შეფასებულია მისი სიზუსტე. მიახლოებითი ამონახსნების კრებადობასთან დაკავშირებული თეორიულად მიღებული შედეგები დადასტურებულია რიცხვით-ექსპერიმენტული გზით.

ნაშრომის აპრობაცია

დისერტაციაში გადმოცემული შედეგები ასახულია ავტორის პუბლიკაციებსა და მოხსენებებში საერთაშორისო და ადგილობრივ კონფერენციებზე, რომელთა ნუსხაც თან ერთვის ავტორეფერატს. გარდა ამისა, სადოქტორო პროგრამის გეგმის შესაბამისად მომზადდა და ჩატარდა თემატური სემინარები და კოლოქვიუმები დისერტაციის ძირითადი შედეგების შესახებ.

მოხსენებები კონფერენციებზე

1.Papukashvili A., Papukashvili G., Peradze J., On the algorithms of approximate solution and the numerical computations for some Kirchhoff type nonlinear integro-differential equations. VIII Annual International Conference of the Georgian Mechanical Union. Book of Abstracts, 47-48, 78-79, Tbilisi, September 27-29, 2017. http://www.viam.science.tsu.ge/others/gnctam/annual8.htm

2. Papukashvili G., Sharikadze M.,Numerical calculations of the Timoshenko type dynamic beam nonlinear integro-differential equation. VIII Annual International Conference of the Georgian Mathematical Union. Book of Abstracts, 144-145, Batumi, September 4-8, 2017. http://www.gmu.ge/batumi2017

3. Papukashvili G., On one method of approximate solution of the J.Ball nonlinear dynamic beam equation. VII International Joint Conference of Georgian Mathematical

Union&Georgian Mechanical Union. Book of Abstracts,186-187, Batumi, September 5-9, 2016. http://www.gmu.ge/batumi2016

4. Peradze J., Tsiklauri Z., G. Papukashvili G.,A one problem of accuracy solution of the static beam. Tbilisi Science Fest.Book of Abstracts, 13-14,Tbilisi,November 11-13, 2015.

5. Peradze J., Tsiklauri Z., Papukashvili G.,On the solution of a boundary value problem for the nonlinear beam. Second Tbilisi-Salerno Workshop on Modeling in Mathematics. Tbilisi, March 16-18, 2015. http://www.unisa.it/news/index/idStructure/3444/id/15850.

6. Papukashvili G., Tsiklauri Z., On the solution of a non-linear integro-differential equation for the string. II Annual Meeting of the Georgian Mechanical Union. Book of Abstracts,34-35, 72. Tbilisi, 15-17 December, 2011; 16 January, 2012. http://www.viam.science.tsu.ge/others/gnctam/annual2.htm

7. Papukashvili G., Peradze J., Dzagania B., Iteration method for one oscillation equation. First International Conference of the Georgian Mathematical Union. Book of Abstracts, 112, Batumi, September 12-19, 2010.

8. Peradze J., Dzagania B., Papukashvili G. , On numerical calculation for one problem of a nonlinear dynamic beam. The International Conference on Information and Computing Technologies. Theses of reports, 125-127, Tbilisi, May 2-6, 2010. http://www.compmath.ge9. Peradze J., Dzagania B., Papukashvili G., An application of a priori estimation method for dynamic beam problem. V Congress of the Georgian Mathematicians. Book of Abstracts, 84, Batumi/Kutaisi, October 9-12, 2009.

გამოქვეყნებული ნაშრომები

1.Papukashvil A., Papukashvili G., Peradze J., On approximate solution of a nonlinear static beam equation. *Bull. Georg. Natl. Acad. Sci.* v.12, no. 1, Tbilisi, 2018. 21-26.

2.Papukashvili G., On a numerical algorithm for a Timoshenko type beam nonlinear integro-differential equation, *Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics.* v.31, Tbilisi, 2017. 115-118.

3. Papukashvili G., On the approximate solution of the J.Ball nonlinear dynamic beam equation, *Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics.* v.30, Tbilisi, 2016. 86-89.

4.Papukashvili G., Peradze J., Tsiklauri Z.,On a stage of a numerical algorithm for Timoshenko typenonlinear equation, *Proc. A.Razmadze Math.Inst.,* 158, Tbilisi ,2012. 67-77.

5.Peradze J., Papukashvili G., Dzagania B., On the accuracy of solution approximation with respect to a spatial variable for one nonlinear integro-differential equation, *Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics*. v.24, Tbilisi 2010. 108-112.

6.Papukashvili A., Papukashvili G., Dzagania B., Numerical calculations of the Kirchhoff nonlinear dynamic beam. *Reports of Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics.* v.24, Tbilisi 2010. 103-107.

7.Papukashvili G., Peradze J., A numerical solution of a string oscillation equation. *Reports Enlarged Session of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics.,* v.23, Tbilisi, 2009. 80-83.

8.Peradze J., Papukashvili G., On one method of the solution of a nonlinear integro-differential equation for a string, *Reports of Enlarged Session of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics.,* v.22, Tbilisi, 2008. 91-93.

SUMMARY

Construction and Research of Approximate Solutions of

Some Nonlinear Integro-Differential Equations

The present PhD Thesis of Giorgi Papukashvili “Construction and Research of Approximate Solutions of Some Nonlinear Integro-Differential Equations”is devoted to some problems of computational mechanics. Several effective algorithms for solving initial-boundary value problems for static and dynamic strings and beams are constructed. The properties of these algorithms are studied in detail and the conditions of their convergence are established. Several numerical experiments were carried out to demonstrate the practical properties of the algorithms under consideration. The theoretical and practical aspects of these algorithms are established and analyzed in the dissertation.

Dissertation work is dedicated to several questions of calculative mechanics, in particular: were constructed and investigated numerical algorithms of string and beam for some static and dynamic mathematical models. There are many works dedicated to the investigation and calculative solutions of these models, but nowadays many things is yet to be studied in this direction. Many modern constructions include: strings, beams, plates and shells. Constructed in the dissertation work, numerical algorithms, both for static and dynamic strings and beams, find high application in theoretical and constructive mechanics. The mentioned above methods can be applied for the plates and shells. The main objects of the research work are: nonlinear integro-differential equations of the Kirchhoff and Timoshenko types, with whose application it is possible to describe the static and dynamic conditions of the strings and beams. There was studied the effectiveness of the different numerical algorithms and conducted computer experiment with the aim to describe relevant border and initial boundary tasks. In the algorithms presented in the dissertation work, during the study of Kirchhoff and Timoshenko’s equations, there are applied the methods of Galerkin and Chipot, symmetric sustainable differentiative schemes, and for the discretive equation solution – the iterative methods of Newton, Jacobi and Picard.

In the first part of the dissertation, there are studied the problems for both static and dynamic strings. Nonlinear integro-differential equations of Kirchhoff type are considered. In the first chapter, the practical aspects of using the method of the Swiss mathematician Chipot for solving the static string problem are studied in detail. The results obtained by us make it possible to determine in advance the accuracy of all the computational steps of this method to achieve the desired accuracy. In the second chapter of the work (dynamic string problem), several computational algorithms were tested on test problems, numerical experiments

were carried out and certain conclusions were made about the effectiveness of these algorithms.

In the second part of the work the problems for both dynamic and static beams are studied. The third chapter deals with the complex nonlinear problem of Timoshenko type for the dynamic beam that is solved by the algorithm constructed in the dissertation. Note that this equation contains as special cases the equation of the Woinowsky-Krieger beam and some other models. The algorithm constructed in the dissertation gives an approximation with respect both spatial and temporal variables. An algorithm for a system of discrete equations is also constructed, in which the nonlinear, in particular, cubic, structure of the model is taken into account. Accordingly, in order to simplify the iterative process in this part of the algorithm, the use of Cardano formulas to some extent managed to optimize the algorithm (counting process), which positively affected the number of necessary (required) iterations - this causes a decrease in the number of iterations to achieve a given (desired) accuracy. In the fourth chapter of the thesis, the problems of approximate solution of the nonlinear integro-differential equation for a static beam of Kirchhoff type are studied. We used an approach based on using of Green's functions which reduces the problem to a nonlinear integral equation, which in turn can be solved by the iterative Picard method. The condition of convergence of the considered method is established and its accuracy is estimated. The theoretical results related to the convergence of approximate solutions are confirmed by numerical experiments.

In the First Part (approximate solution of static and dynamic strings such as Kirchhoff) and in the Second Part (approximate solution of static and dynamic beams such as Kirchhoff)of the thesis, there are created perfect program codes, with which it is possible to increase the accuracy of approximate solutions of different test and practical problems. The program codes provide the opportunity to calculate practical problems, the results of which can be used by specialists in engineering activities.